PHẠM ĐỨC TÀI (Chủ biên)
NGUYỄN THÀNH ANH – NGUYỄN NGỌC HẢI – NGÔ HOÀNG LONG
NGUYỄN THỊ VĨNH THUYÊN – ĐINH CAO THƯỢNG

HƯỚNG DẪN ÔN THI TỐT NGHIỆP
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
môn
Toán

(Biên soạn theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH
Địa chỉ: 231 Nguyễn Văn Cừ, Phường 4, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh
Điện thoại: (028) 38 323 767| **Fax:** (028) 38 323 040
Website: www.xuatbangiadinh.vn

VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH VÀ THIẾT BỊ GIÁO DỤC MIỀN BẮC
Địa chỉ: Số 24, 25 Liền kề 11 – Khu đô thị Văn Khê, P. La Khê, Q. Hà Đông, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.38562011| **Fax:** 024.38562493
Email: kd.stbmb@gmail.com| **Website:** www.stbmienbac.vn

TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU

Bộ sách

HƯỚNG DẪN ÔN THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

(Biên soạn theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018)

1. **Hướng dẫn ôn thi tốt nghiệp Trung học phổ thông môn Toán**
2. **Hướng dẫn ôn thi tốt nghiệp Trung học phổ thông môn Ngữ văn**
3. **Hướng dẫn ôn thi tốt nghiệp Trung học phổ thông môn Tiếng Anh**
4. **Hướng dẫn ôn thi tốt nghiệp Trung học phổ thông môn Lịch sử**
5. **Hướng dẫn ôn thi tốt nghiệp Trung học phổ thông môn Địa lí**
6. **Hướng dẫn ôn thi tốt nghiệp Trung học phổ thông môn Vật lí**
7. **Hướng dẫn ôn thi tốt nghiệp Trung học phổ thông môn Hoá học**
8. **Hướng dẫn ôn thi tốt nghiệp Trung học phổ thông môn Sinh học**
9. **Hướng dẫn ôn thi tốt nghiệp Trung học phổ thông môn Tin học**
10. **Hướng dẫn ôn thi tốt nghiệp Trung học phổ thông môn Giáo dục kinh tế và pháp luật**

ISBN 978-604-0-42297-2
9 786040 422972
Giá: 78.000 đ

PHẠM ĐỨC TÀI (Chủ biên)
NGUYỄN THÀNH ANH – NGUYỄN NGỌC HẢI – NGÔ HOÀNG LONG
NGUYỄN THỊ VĨNH THUYÊN – ĐINH CAO THƯỢNG

HƯỚNG DẪN ÔN THI TỐT NGHIỆP
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
môn
Toán

(Biên soạn theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Tài liệu **Hướng dẫn ôn thi tốt nghiệp Trung học phổ thông môn Toán** ***(biên soạn theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018)*** được biên soạn nhằm hỗ trợ cho học sinh trong quá trình ôn thi tốt nghiệp Trung học phổ thông môn Toán. Nội dung của sách đáp ứng những yêu cầu cần đạt của Chương trình tổng thể và chương trình môn Toán cấp Trung học phổ thông, bám sát theo hướng dẫn của Bộ Giáo dục và Đào tạo về tổ chức Kì thi tốt nghiệp Trung học phổ thông và Quyết định số 764/QĐ-BGDĐT ngày 08 tháng 3 năm 2024 của Bộ Giáo dục và Đào tạo *Quy định về cấu trúc định dạng đề thi Kì thi tốt nghiệp Trung học phổ thông từ năm 2025*.

Cấu trúc của sách gồm các phần chính sau:

Phần một. Ôn tập theo chủ đề: bao gồm nội dung cốt lõi, các câu hỏi, bài tập được sử dụng để củng cố kiến thức, làm quen với các dạng câu hỏi và bài tập theo cấu trúc đề thi tốt nghiệp Trung học phổ thông từ năm 2025.

Phần hai. Đề ôn tập: bao gồm 05 đề ôn tập được biên soạn bám sát theo cấu trúc quy định trong Quyết định số 764/QĐ-BGDĐT ngày 08 tháng 3 năm 2024 của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Theo đó, mỗi đề thi có ba dạng thức câu hỏi:

– Dạng thức trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn: có 12 câu, chọn 01 đáp án đúng trong 04 phương án;

– Dạng thức trắc nghiệm đúng sai: có 04 câu, mỗi câu có 04 ý, chọn đúng hoặc sai cho mỗi ý;

– Dạng thức trắc nghiệm trả lời ngắn: có 06 câu.

Các câu hỏi được phân bổ theo tỉ lệ xác định cho các mức độ (nhận biết, thông hiểu và vận dụng) và các thành phần năng lực toán học.

Phần ba. Hướng dẫn – Đáp án: đáp án của tất cả các câu hỏi, bài tập trong từng chủ đề cũng như đề ôn tập cùng với các hướng dẫn gợi ý để học sinh có thể tự học, tự so sánh kết quả làm bài của mình.

Với cấu trúc như trên, các tác giả hi vọng quyển sách sẽ là người bạn đồng hành đáng tin cậy giúp các em học sinh trong quá trình ôn luyện để chuẩn bị bước vào Kì thi tốt nghiệp Trung học phổ thông môn Toán theo Chương trình giáo dục phổ thông năm 2018.

Chúc các em học tập hiệu quả và có một kì thi thành công!

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

PHẦN MỘT. ÔN TẬP THEO CHỦ ĐỀ

Chủ đề I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Sự biến thiên

Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K.

Định nghĩa:

– Hàm số $y = f(x)$ gọi là *đồng biến* (*tăng*) trên K nếu với mọi x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

– Hàm số $y = f(x)$ gọi là *nghịch biến* (*giảm*) trên K nếu với mọi x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

Định lí:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm trên K. Khi đó:

– Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K.

– Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K.

Chú ý: Chiều ngược lại của các khẳng định trên cũng đúng, nghĩa là nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên K thì $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) với mọi $x \in K$.

2. Cực trị

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K và $x_0 \in K$.

Định nghĩa:

– Điểm x_0 gọi là *điểm cực đại* của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ sao cho

$$x_0 \in (a; b) \subset K \text{ và } f(x_0) > f(x),\ \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ gọi là *giá trị cực đại* (hay *cực đại*) của hàm số $y = f(x)$.

– Điểm x_0 gọi là *điểm cực tiểu* của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ sao cho

$$x_0 \in (a; b) \subset K \text{ và } f(x_0) < f(x),\ \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ gọi là *giá trị cực tiểu* (hay *cực tiểu*) của hàm số $y = f(x)$.

Điểm cực đại, điểm cực tiểu của hàm số gọi chung là điểm cực trị của hàm số đó; giá trị cực đại (cực đại), giá trị cực tiểu (cực tiểu) của hàm số gọi chung là *giá trị cực trị* (*cực trị*) của hàm số đó.

Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $M(x_0; f(x_0))$ gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Định lí:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

– Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0.

– Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

3. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D.

– Số M gọi là *giá trị lớn nhất của hàm số* $y = f(x)$ trên D nếu $f(x) \le M$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = M$. Kí hiệu $M = \max\limits_D f(x)$.

– Số m gọi là *giá trị nhỏ nhất của hàm số* $y = f(x)$ trên D nếu $f(x) \ge m$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = m$. Kí hiệu $m = \min\limits_D f(x)$.

Chú ý:

– Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số, ta thường vẽ bảng biến thiên của hàm số. Từ bảng biến thiên, ta có thể chỉ ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

– Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì hàm số này luôn có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$. Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$, ta tìm tất cả các giá trị cực trị của hàm số trên khoảng $(a; b)$ và tính hai giá trị đầu mút $f(a)$ và $f(b)$. Giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

4. Tiệm cận

Định nghĩa:

– Đường thẳng $x = a$ gọi là *đường tiệm cận đứng* (hay *tiệm cận đứng*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty.$$

– Đường thẳng $y = m$ gọi là *đường tiệm cận ngang* (hay *tiệm cận ngang*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = m$ hoặc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = m$.

– Đường thẳng $y = ax + b$ $(a \ne 0)$ gọi là *đường tiệm cận xiên* (hay *tiệm cận xiên*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Chú ý: Có thể tìm các hệ số a, b trong phương trình của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ theo công thức như sau:

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] \text{ hoặc } a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax].$$

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Trong các câu từ câu 1 đến câu 10, chọn một phương án trả lời đúng.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-2; 2)$. B. $(-2; +\infty)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(-2; 1)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(0; 2)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-2; -\infty)$. D. $(1; 2)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(3) > f(0)$. B. $f(-1) > f(0)$. C. $f(3) > f(5)$. D. $f(1) > f(3)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số là:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = xe^x$.

A. $x = 1$ là điểm cực đại của hàm số.

B. $x = -1$ là điểm cực đại của hàm số.

C. $x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

D. $x = -1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 6. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = x + 1 - \frac{4}{x-3} \text{ trên đoạn } [-1; 2].$$

Giá trị của $M - m$ bằng

A. 1. B. $\frac{9}{5}$. C. 6. D. 8.

Câu 7. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2 + 2x - e^x$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

A. 1. B. $6 - e^2$. C. $\ln 2$. D. $2\ln 2$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	-1

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 9. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 2}{x+1}$ có phương trình là

A. $y = x - 2$. B. $y = x - 1$. C. $y = x + 1$. D. $x = -1$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $3f(x) + 1 = 0$ là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Trong các câu từ câu 1 đến câu 10, chọn đúng hoặc sai cho mỗi ý a), b), c), d).

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

d) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1$.

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

c) Hàm số đồng biến trên khoảng (1; 3).

d) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = x^2e^x$.

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng (0; 2).

d) Hàm số nghịch biến trên khoảng (–2; 0).

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$		1	$\nearrow +\infty$	|| $-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

a) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng.

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng (–1; 3).

c) Hàm số có hai giá trị cực trị là –1 và 3.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên nửa đoạn (1; 2] bằng –2.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.

a) Hàm số đã cho có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ với $x \neq 1$.

b) Đường thẳng $y = x - 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

c) Hàm số có giá trị cực đại bằng 5.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng (–1; 1) bằng 1.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$.

b) $x = 1$ là điểm cực tiểu của của hàm số.

c) Hàm số có hai điểm cực trị.

d) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 7. Biết rằng hàm số $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 6x + b$ (a và b là hằng số thực) đạt cực trị bằng 4 tại $x = 1$.

a) Giá trị của $a + b$ bằng 8.

b) Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

c) $x = -1$ là một điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

d) Giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ bằng 12.

Câu 8. Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{x^2-x}$.

a) Tập xác định của hàm số là $D = [-2; +\infty) \setminus \{0; 1\}$.

b) Đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

c) Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

d) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.

Câu 9. Nồng độ thuốc $C(t)$ tính theo mg/cm^3 trong máu của bệnh nhân được tính bởi $C(t) = \dfrac{0,05t}{t^2+t+1}$, trong đó t là thời gian tính theo giờ kể từ khi tiêm cho bệnh nhân.

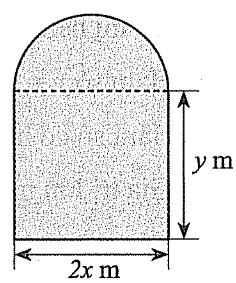
a) Hàm số $C(t)$ có đạo hàm $C'(t) = \dfrac{1-t^2}{20(t^2+t+1)^2}, t \geq 0$.

b) Sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân giảm dần theo thời gian.

c) Nồng độ thuốc trong máu lớn nhất ở thời điểm 1 giờ sau khi tiêm.

d) Có thời điểm nồng độ trong máu của bệnh nhân đạt 0,02 mg/cm^3.

Câu 10. Người ta dùng một thanh thép có chiều dài 4 m để uốn thành khung viền của một cửa sổ có dạng một hình chữ nhật ghép với nửa hình tròn có các kích thước được cho trên Hình 1.



Hình 1

a) Có thể biểu thị y theo công thức $y = 2 - \dfrac{(\pi-2)x}{2}$.

b) Diện tích của cửa sổ được tính bởi công thức
$S(x) = 4x - 2x^2 - \dfrac{\pi x^2}{2}$ (m^2).

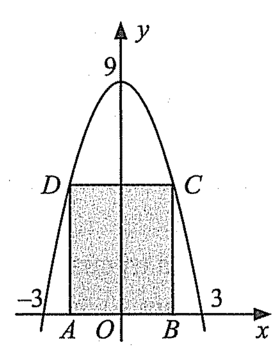
c) Diện tích của cửa sổ lớn nhất khi $x = \dfrac{4}{\pi+2}$ (m).

d) Giá trị lớn nhất của diện tích cửa sổ là $\dfrac{8}{\pi+4}$ (m^2).

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

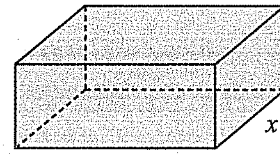
Câu 1. Cho bất phương trình $x^2 - (m+1)x - m + 2 \geq 0$, với m là tham số thực. Tìm giá trị lớn nhất của m sao cho bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 4]$.

Câu 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có hai đỉnh di động trên đồ thị hàm số $y = 9 - x^2$ trên khoảng $(-3; 3)$, hai đỉnh còn lại nằm trên trục hoành (Hình 2). Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Hình 2

Câu 3. Người ta muốn làm một chiếc hộp kim loại hình hộp chữ nhật có thể tích 72 cm^3 và đáy có chiều dài gấp đôi chiều rộng (Hình 3). Tính diện tích toàn phần nhỏ nhất đạt được của chiếc hộp (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của cm^3).



Hình 3

Câu 4. Tại một nhà máy, khi sản xuất x tạ sản phẩm ($x > 0$) mỗi ngày thì chi phí trung bình trên mỗi tạ sản phẩm được tính bởi công thức

$$\overline{C}(x) = \frac{1}{2}x + 3 + \frac{8}{x} \text{ (triệu đồng/tạ).}$$

Tính chi phí trung bình thấp nhất (tính theo triệu đồng/tạ) mà nhà máy có thể đạt được trong ngày.

Câu 5. Quan sát một đàn ong trong 20 tuần, người ta ước lượng được số lượng ong trong đàn bởi công thức $P(t) = \dfrac{20\,000}{1+1000e^{-t}}$, trong đó t là thời gian tính theo tuần kể từ khi bắt đầu quan sát, $0 \le t \le 20$. Tại thời điểm nào thì số lượng ong của đàn tăng nhanh nhất (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của tuần)?

Chủ đề II. NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

A. Nguyên hàm

1. Định nghĩa

a) *Định nghĩa*: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn của $\mathbb{R}$). Hàm số $F(x)$ được gọi là một *nguyên hàm* của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.

b) *Nhận xét*: Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:

- Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K;
- Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi x thuộc K.

Như vậy: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$ (C là hằng số), kí hiệu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, gọi là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Nghĩa là $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ (C là hằng số).

Người ta chứng minh được rằng: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.

c) *Chú ý*: Biểu thức $f(x)\mathrm{d}x$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, kí hiệu $\mathrm{d}F(x)$. Vậy $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Tính chất của nguyên hàm

Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên K và số thực $k \neq 0$. Ta có:

- $\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$;
- $\int [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$;
- $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp thường gặp

$\int 0\,\mathrm{d}x = C$	$\int 1\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$
$\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$	$\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^{x}\,\mathrm{d}x = e^{x} + C$	$\int a^{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C\ (a > 0,\ a \neq 1)$
$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$	$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$

B. Tích phân

1. Định nghĩa

a) *Định nghĩa*: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là *tích phân* từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int_a^b f(x)\,dx$. Do đó, $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân, a và b là cận tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

b) *Chú ý*:

– Tích phân không phụ thuộc vào kí hiệu của biến: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$.

– Quy ước: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$; $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

c) *Ý nghĩa hình học của tích phân*: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)\,dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Vậy $S = \int_a^b f(x)\,dx$.

2. Tính chất của tích phân

Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$;
- $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$;
- $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ (với k là hằng số);
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (với $a < c < b$).

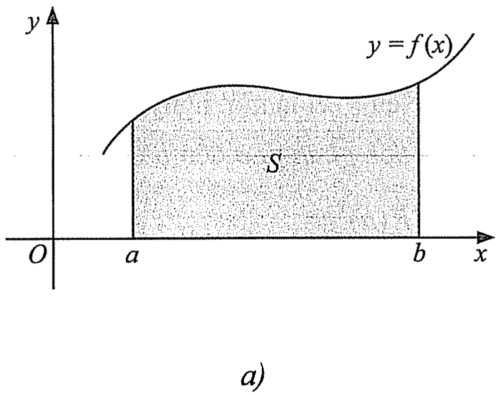
C. Ứng dụng hình học của tích phân

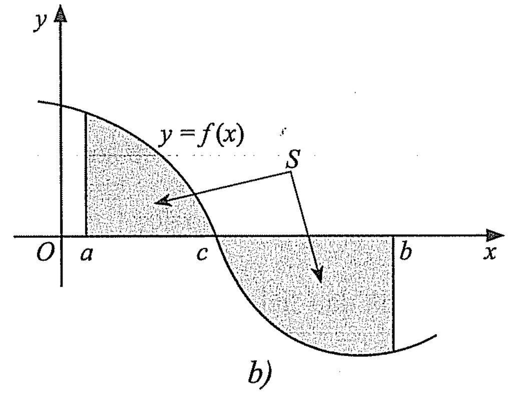
1. Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng

a) *Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của một hàm số, trục hoành và hai đường thẳng* $x = a$, $x = b$

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$





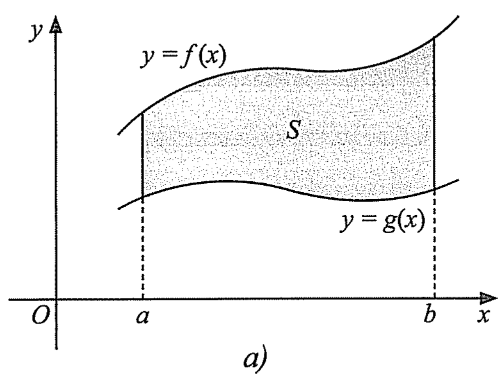
Hình 1

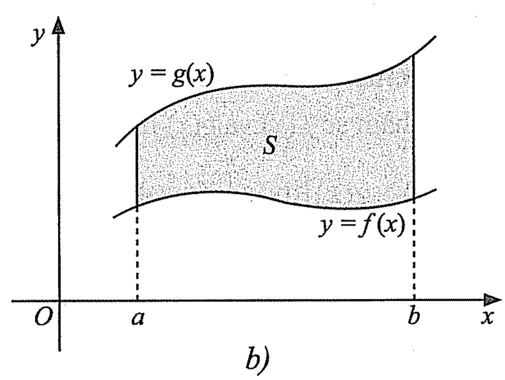
Chú ý: Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$ thì $S = \int_a^b |f(x)|\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$.

b) *Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$*

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$





Hình 2

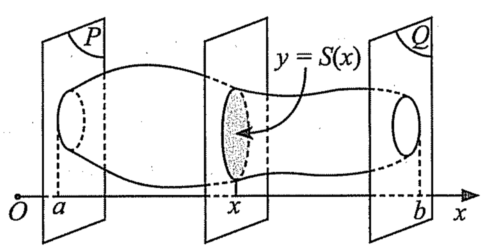
Chú ý: Nếu hiệu $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$ thì

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx\right|.$$

2. Ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể

a) *Tính thể tích vật thể*

Cho một vật thể trong không gian $Oxyz$. Gọi (H) là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm có hoành độ $x = a$, $x = b$. Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x $(a \le x \le b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có



Hình 3

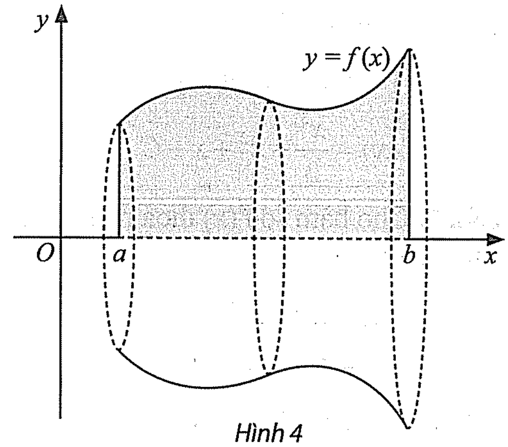
diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$. Khi đó thể tích V của phần vật thể (H) được tính bởi công thức:

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) *Tính thể tích khối tròn xoay*

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$. Khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ xung quanh trục hoành, ta được một hình khối gọi là khối tròn xoay. Thể tích V của khối tròn xoay đó được tính bởi công thức:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$



Hình 4

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Trong các câu từ câu 1 đến câu 30, chọn một phương án trả lời đúng.

A. Nguyên hàm

Câu 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int x^{\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C.$ B. $\int x^{\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}} + C.$

C. $\int x^{\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x = 3x^{\frac{1}{3}} + C.$ D. $\int x^{\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + C.$

Câu 2. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{3^{2x}}{\ln 3} + C.$ B. $\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{9^x}{\ln 9} + C.$

C. $\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x = 3^{2x}.\ln 3 + C.$ D. $\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x = 9^x.\ln 9 + C.$

Câu 3. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x - \sin x$ là

A. $\frac{x^2}{2} - \cos x + C.$ B. $\frac{x^2}{2} + \cos x + C.$

C. $x^2 - \cos x + C.$ D. $x^2 + \cos x + C.$

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{x} - 1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là

A. $2\sqrt{x} + \ln x + C.$ B. $2\sqrt{x} - \ln x + C.$

C. $4\sqrt{x} + \ln x + C.$ D. $4\sqrt{x} - \ln x + C.$

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (\tan x + \cot x)^2$ là

A. $2x + \tan x - \cot x + C$.
B. $2x + \tan x + \cot x + C$.
C. $\tan x - \cot x + C$.
D. $\tan x + \cot x + C$.

Câu 6. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-1)^2$?

A. $F(x) = x^3 - x^2 + x + C$.
B. $F(x) = x^3 + x^2 + x + C$.
C. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x + C$.
D. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 + x + C$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $f'(x) = 2x - 3e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 5$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x) = 2x + 3e^x + 2$.
B. $f(x) = x^2 + 3e^x + 2$.
C. $f(x) = 2x - 3e^x + 8$.
D. $f(x) = x^2 - 3e^x + 8$.

Câu 8. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x\sqrt{x}$ trên $(0; +\infty)$ và $F(1) = 5$. Giá trị của $F(4)$ bằng

A. 70.
B. 35.
C. 67.
D. 69.

Câu 9. Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4^x$ và $F(1) = \dfrac{1}{\ln 2}$. Giá trị của $F\left(\dfrac{3}{2}\right).\ln 2$ bằng

A. 3.
B. 7.
C. 5.
D. 9.

Câu 10. Giả sử một chất điểm chuyển động với gia tốc tại thời điểm t (giây) được xác định bởi công thức $a(t) = 2t - 1$ (m/s^2). Biết rằng vận tốc của chất điểm tại thời điểm ban đầu là $v_0 = 2$ (m/s). Vận tốc của chất điểm đó tại thời điểm t (giây) là

A. $v(t) = 2t^2 - t + 2$ (m/s).
B. $v(t) = t^2 - t + 2$ (m/s).
C. $v(t) = 2t^2 - t$ (m/s).
D. $v(t) = t^2 - t$ (m/s).

B. Tích phân

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 3, f(5) = 2$. Giá trị của $\int_2^5 f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. –1.
B. 1.
C. 5.
D. 6.

Câu 12. Nếu hàm số $f(x)$ thoả mãn $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$ và $\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 20$ thì giá trị của $\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. –14.
B. 26.
C. 14.
D. 28.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu $\int_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ thì giá trị của $\int_{-1}^4 [4 - 3f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. –2.
B. 14.
C. 5.
D. –4.

Câu 14. Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên [1; 2] thoả mãn $\int_1^2 [f(x)+3g(x)]\,dx = 9$ và $\int_1^2 [5f(x)-2g(x)]\,dx = 11$. Giá trị của $\int_1^2 f(x)\,dx$ bằng

A. 3. B. 2. C. 6. D. 4.

Câu 15. Giá trị của $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$ bằng

A. 12. B. 6. C. $\frac{20}{3}$. D. $\frac{28}{3}$.

Câu 16. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2\sin x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$ bằng

A. $2\sqrt{3}-1$. B. $2\sqrt{3}$. C. $2+\sqrt{3}$. D. $1+\sqrt{3}$.

Câu 17. Giá trị của $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^2 x\,dx$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{3}$.

Câu 18. Biết rằng $\int_0^1 \frac{2e^{2x}+3}{e^x}\,dx = \frac{m.e^2+n.e+p}{e}$ (với $m, n, p \in \mathbb{Z}$). Khi đó $m+2n-p$ bằng

A. 2. B. 6. C. 1. D. 7.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2+2 & \text{khi } x \le 1 \\ 8x-3 & \text{khi } x > 1. \end{cases}$

Khi đó giá trị của $\int_{-2}^2 f(x)\,dx$ bằng

A. 0. B. 24. C. –12. D. –6.

Câu 20. Giá trị của $\int_1^4 (|x-2|+|x-3|)\,dx$ bằng

A. 3. B. 6. C. 5. D. 7.

C. Ứng dụng hình học của tích phân

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn [1; 3]. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=1$, $x=3$ là

A. $S=\int_1^3 |f(x)|\,dx$. B. $S=\int_1^3 f(x)\,dx$. C. $S=-\int_1^3 f(x)\,dx$. D. $S=\int_3^1 |f(x)|\,dx$.

Câu 22. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x+1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$ quanh trục hoành là

A. $V=\int_{-1}^2 (x+1)^2\,dx$. B. $V=\pi\int_{-1}^2 (x+1)^2\,dx$.

C. $V=\int_{-1}^2 |x+1|\,dx$. D. $V=\pi\int_{-1}^2 |x+1|\,dx$.

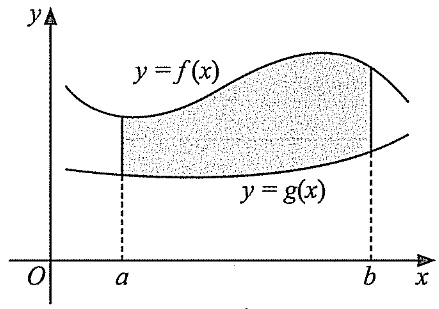
Câu 23. Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục thành trên đoạn $[a; b]$ và có đồ thị như hình 5. Xét khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục hoành. Thể tích khối tròn xoay đó được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $V = \pi\int_a^b \left[g^2(x) - f^2(x)\right]\mathrm{d}x.$

B. $V = \pi\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]^2 \mathrm{d}x.$

C. $V = \pi\int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]\mathrm{d}x.$

D. $V = \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]\mathrm{d}x.$



Hình 5

Câu 24. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = e^x$, $y = -5$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ bằng

A. $S = \int_0^4 (e^x + 5)\mathrm{d}x.$

B. $S = \int_0^4 (e^x - 5)\mathrm{d}x.$

C. $S = \pi\int_0^4 (e^x + 5)\mathrm{d}x.$

D. $S = \pi\int_0^4 (e^x + 5)^2\mathrm{d}x.$

Câu 25. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2$; $x = 3$ bằng

A. $\frac{27}{4}$. B. $\frac{11}{4}$. C. $\frac{75}{4}$. D. 12.

Câu 26. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$ bằng

A. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. D. $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 27. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P): $y = f(x) = x^2 - 1$, trục tung và tiếp tuyến của (P) tại điểm $M(-1; 0)$ bằng

A. $\frac{5}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 28. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$ và trục hoành quanh trục hoành bằng

A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{4\pi}{3}$. C. $\frac{16}{15}$. D. $\frac{16\pi}{15}$.

Câu 29. Cho một vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm có hoành độ $x = -1$ và $x = 1$. Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x $(-1 \le x \le 1)$ cắt vật thể đó theo một mặt cắt là hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{1-x^4}$. Thể tích của vật thể đó bằng

A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{4\pi}{5}$. C. $\frac{8}{5}$. D. $\frac{8\pi}{5}$.

Câu 30. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = a$ $(a > 0)$. Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = b$ $(b > 0)$. Biết $S_2 = 5S_1 + 4$, khi đó $b - a$ bằng

A. $\ln 5$. B. $-\ln 5$. C. 5. D. -5.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Trong các câu từ câu 1 đến câu 14, chọn đúng hoặc sai cho mỗi ý a), b), c), d).

A. Nguyên hàm

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = -4x + 3$. Khi đó:

a) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F'(2) = -5$.

b) $F(x) = -2x^2 + 3x$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

c) Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $G(1) = 2$ thì $G(2) = -1$.

d) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(-x)$ là một nguyên hàm của $f(-x)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = 2\cos x$ và $g(x) = 2\sin^2 \frac{x}{2}$. Khi đó:

a) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sin x + C$.

b) $\int g(x)\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

c) $\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = x + \sin x + C$.

d) $\int \frac{f(x)}{g(x)-1}\,\mathrm{d}x = 2x + C$ (biết x thoả mãn $g(x) \ne 1$).

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = 3^x$. Khi đó:

a) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3^x \ln 3 + C$.

b) $\int \left[f(x) - e^x\right]\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3} - e^x + C$.

c) $\int f(x).e^x\,\mathrm{d}x = \frac{3^x.e^x}{1+\ln 3} + C$.

d) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F'(\log_9 5) = \sqrt{5}$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = |x - 1|$. Khi đó:

a) Trên khoảng $(1; +\infty)$, một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2$.

b) Trên khoảng $(-\infty; 1)$, một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $G(x) = \frac{x^2}{2} - x - 1$.

c) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(2) = 3$ thì $F(4) = 7$.

d) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 1$ thì $F(-2) + F(4) = 4$.

B. Tích phân

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=3x^2-2x+5$ có đạo hàm $f'(x)$. Khi đó:

a) $\int_{-1}^{2} f'(x)\,dx=3$.

b) $\int_{0}^{1} f(x)\,dx=7$.

c) $\int_{0}^{2} 3f(x)\,dx=42$.

d) $\int_{0}^{1} xf(x)\,dx=\frac{31}{12}$.

Câu 6. Cho hai hàm số $f(x)=e^x$ và $g(x)=2e^x-3$. Khi đó:

a) $\int_{0}^{\ln 2} g(x)\,dx=2-3\ln 2$.

b) $2\int_{0}^{2} f(x)\,dx=3+\int_{0}^{2} g(x)\,dx$.

c) $\int_{2}^{7}\left[2f(x)-g(x)\right]dx=-15$.

d) Nếu $\int_{0}^{1} f(x).g(x)\,dx=a.e^2+b.e+c$ (với a, b, c là các số nguyên) thì $a+b+c=0$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=x\sin x$ có đạo hàm là $f'(x)$. Khi đó:

a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2f'(x)\,dx=\pi$.

b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)-\sin x\right]dx=\frac{\pi}{2}$.

c) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sin x}\,dx=\frac{5\pi}{72}$.

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{\left[f(x)\right]^2}\,dx=1$.

Câu 8. Trên khoảng $(0;+\infty)$, cho hàm số $f(x)=\frac{1-3\sqrt{x}}{x}$. Khi đó:

a) $\int_{1}^{4} f'(x)\,dx=\frac{3}{4}$.

b) $\int_{1}^{4} f(x)\,dx=-6+\ln 4$.

c) $\int_{1}^{4} xf(x)\,dx=11$.

d) $\int_{1}^{4}\left[f'(x)+2x.f(x)\right]dx=\frac{91}{4}$.

Câu 9. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=2t$ (m/s), trong đó thời gian t tính bằng giây. Sau khi chuyển động được 12 giây thì ô tô gặp chướng ngại vật và người tài xế phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v_2(t)$ và gia tốc là $a=-8$ (m/s^2) cho đến khi dừng hẳn. Khi đó:

a) Quãng đường ô tô chuyển động nhanh dần đều là 144 m.

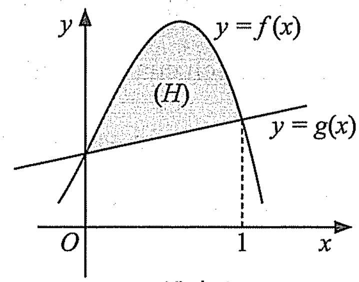
b) Vận tốc của ô tô tại thời điểm người tài xế phanh gấp là 24 m/s.

c) Thời gian từ lúc ô tô giảm tốc độ cho đến khi dừng hẳn là 3 giây.

d) Tổng quãng đường ô tô chuyển động từ lúc xuất phát đến khi dừng hẳn là 168 m.

C. Ứng dụng hình học của tích phân

Câu 10. Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và có đồ thị như hình bên. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$.



Hình 6

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ là $S = \int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$ quanh trục hoành là $V = \int_0^1 f^2(x)\,dx$.

c) Diện tích hình phẳng (H) là $S = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx$.

d) Thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox là

$$V = \pi\int_0^1 \left[f^2(x) - g^2(x)\right]dx.$$

Câu 11. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2, x = 6$. Khi đó:

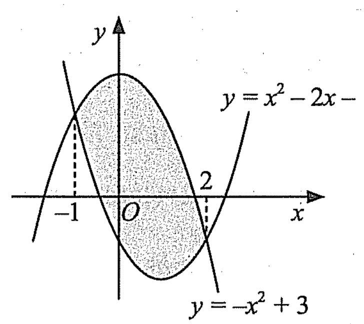
a) Diện tích hình phẳng (H) là $S = 4 + \ln 3$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2; x = 6$ là $S = 2\ln 3$.

c) Thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox là $V = \dfrac{(13 + 6\ln 3)\pi}{3}$.

d) Thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và các đường thẳng $y = 1, x = 2, x = 6$ quanh trục Ox là $V = \dfrac{1 + 6\ln 3}{3}$.

Câu 12. Cho hình phẳng (H) là phần tô đậm trong hình 7. Khi đó:



Hình 7

a) Hình phẳng (H) giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 1$, $y = -x^2 + 3$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.

b) Diện tích hình phẳng (H) là

$S = \int_{-1}^{2} \left|(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)\right| dx$.

c) Diện tích hình phẳng (H) là $S = 2\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)\,dx$.

d) Nếu $\ln S = a\ln b$ (với a, b là các số nguyên tố) thì $a^2 + b^2 = 29$.

Câu 13. Cho hình phẳng (*H*) giới hạn bởi các đường $y = 2x^2\,(C_1)$, $y^2 = 4x\ (C_2)$. Khi đó:

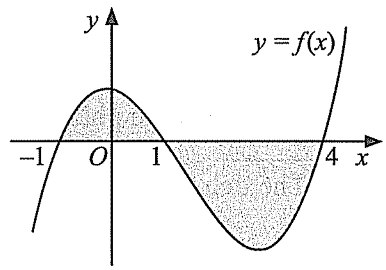
a) Các đường (C_1) và (C_2) đều đi qua hai điểm $O(0;\,0)$ và $M(1;\,2)$.

d) Diện tích của hình phẳng (*H*) là $S = \int\limits_0^2 \left|2x^2 - 2\sqrt{x}\right| \mathrm{d}x$.

c) Thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay (*H*) quanh trục hoành là $V = \pi\int\limits_0^1 (4x - 4x^4)\,\mathrm{d}x$.

d) Nếu $\dfrac{V}{S} = \dfrac{a}{b}.\pi$ (với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì $2a - b = 17$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Gọi (*H*) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = -1$, $x = 4$. Khi đó:



Hình 8

a) Diện tích *S* của hình phẳng (*H*) là $S = \int\limits_{-1}^4 \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$.

b) Diện tích *S* của hình phẳng (*H*) là $S = \int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x$.

c) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(1) > F(-1) > F(4)$.

d) Thể tích vật thể được tạo thành khi quay (*H*) quanh trục hoành là $V = \int\limits_{-1}^4 [f(x)]^2 \mathrm{d}x$.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

A. Nguyên hàm

Câu 1. Biết hàm số $F(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 6}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2}$ (với *a*, *b*, *c* là các số thực). Khi đó giá trị $a + b - c$ bằng ....

Câu 2. Biết hàm số $F(x) = a\sin x + b\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x - \cos x$. Khi đó giá trị của $a + 2b$ bằng ....

Câu 3. Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + 3x^2$ và $F(1) = \dfrac{2}{\ln 2}$. Giá trị của $F(2)$ (làm tròn đến hàng phần mười) bằng ....

Câu 4. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng *x* năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao 3 m. Trong các năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{x}$ (tính theo mét/năm). Chiều cao của cây đó sau 5 năm (làm tròn đến hàng phần mười) bằng bao nhiêu mét?

Câu 5. Một ô tô đang chạy với vận tốc 17,5 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động với vận tốc $v(t) = \frac{35}{2} - \frac{7}{2}t$ (m/s), trong đó t (tính bằng giây) là thời gian kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn bằng bao nhiêu mét?

B. Tích phân

Câu 6. Một vật chuyển động với vận tốc được tính theo thời gian theo công thức $v(t) = \begin{cases} 2t \text{ khi } 0 \le t \le 2 \\ 4 \text{ khi } t > 2 \end{cases}$ (t tính bằng giây, v tính bằng m/s). Quãng đường mà vật dịch chuyển được trong vòng 4 giây đầu tiên bằng .... m.

Câu 7. Giả sử lợi nhuận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của một loại sản phẩm của nhà máy được tính theo công thức $P'(x) = 18 - 0,04x$. Trong đó $P(x)$ (tính bằng triệu đồng) là lợi nhuận thu được khi bán x tấn sản phẩm. Chênh lệch lợi nhuận khi bán 100 tấn sản phẩm so với khi bán 50 tấn sản phẩm là .... triệu đồng.

Câu 8. Một bồn chứa nước bị rò rỉ với tốc độ nước chảy vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $V'(t) = 160 - 2t$ (lít/phút). Biết rằng $V(t)$ (tính bằng lít) là thể tích nước trong bồn tại thời điểm t phút. Thể tích nước chảy ra khỏi bồn trong 15 phút đầu tiên kể từ khi nước bị rò rỉ bằng .... lít.

Câu 9. Tại một địa điểm, trong khoảng thời gian 12 giờ nhiệt độ tại thời điểm t (tính bằng giờ kể từ lúc bắt đầu) là $T(t) = 47 + 4t - \frac{1}{3}t^2$ (°C). Nhiệt độ trung bình trong khoảng thời gian đó bằng .... °C.

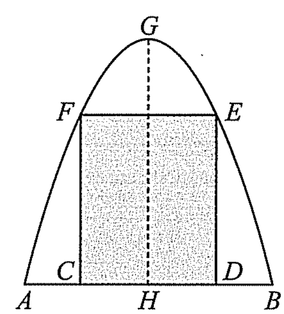
Câu 10. Giả sử anh Nam nhảy dù từ một chiếc trực thăng. Vào thời điểm 19 giây sau khi rời khỏi trực thăng, anh Nam mở chiếc dù của mình trong 2 giây, anh Nam chạm đất sau 19 giây kể từ lúc bung dù. Tại thời điểm t (giây), vị trí của anh Nam cách mặt đất một khoảng $h(t)$ mét và vận tốc rơi của anh Nam (tính bằng m/s) là một hàm số được cho bởi công thức:

$$v(t) = h'(t) = \begin{cases} -80 & \text{khi } 0 \le t < 19 \\ 37t - 783 & \text{khi } 19 \le t < 21 \\ -6 & \text{khi } 21 \le t \le 40. \end{cases}$$

Độ cao vị trí của anh Nam khi bắt đầu nhảy ra khỏi trực thăng bằng .... m.

C. Ứng dụng hình học của tích phân

Câu 11. Một cánh cổng của một toà nhà có dạng parabol gồm hai phần: phần hai cánh cửa hình chữ nhật $CDEF$, còn lại là phần xiên hoa trang trí (Hình 9). Biết rằng $GH = 4$ m, $AB = 4$ m và $AC = BD = 0,9$ m. Diện tích phần cổng làm xiên hoa trang trí (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) bằng bao nhiêu mét vuông?

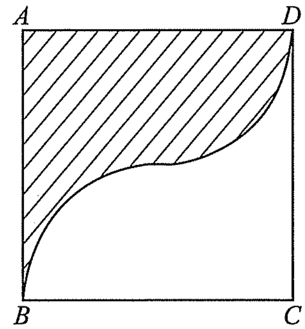


Hình 9

Câu 12. Khi sử dụng phần mềm mô phỏng để thiết kế một chậu cây, người ta quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}+2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 4$ quanh trục hoành. Biết đơn vị trên các trục toạ độ là đềximét. Thể tích của chậu cây (kết quả làm tròn đến hàng phần mười) bằng bao nhiêu đềximét khối?

Câu 13. Một chi tiết máy được thiết kế bằng cách quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+5$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1$, $x = 4$ quanh trục hoành. Biết đơn vị trên các trục toạ độ là centimét. Thể tích của chi tiết máy đó (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) bằng bao nhiêu centimét khối?

Câu 14. Một vật trang trí có dạng là khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình bên) quanh trục AB. Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AD. Thể tích của vật trang trí đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) bằng bao nhiêu centimét khối? (*Trích đề Minh hoạ tốt nghiệp THPT năm 2024*).



Hình 10

Câu 15. Lượng mưa theo giờ, tính bằng inch/giờ, ở hai địa điểm khác nhau sau t giờ khi bão đổ bộ, được cho bởi các hàm số $f(t)=0,73t^3-2t^2+t+0,6$ và $g(t)=0,17t^2-0,5t+1,1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đã cho và hai đường thẳng $t=0$, $t=2$, từ đó tính sự chênh lệch lượng mưa ở hai địa điểm khác nhau sau 2 giờ.

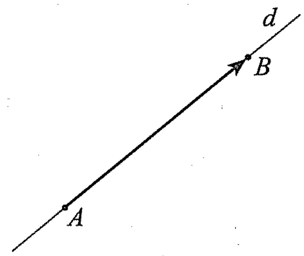
Chủ đề III. VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Vectơ trong không gian

a) *Định nghĩa*

– Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.



Hình 1

b) Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian, ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

– Với vectơ $\overrightarrow{AB}$, ta có:

+ Điểm A là điểm đầu; điểm B là điểm cuối.

+ Hướng của vectơ $\overrightarrow{AB}$: Từ A đến B.

+ Đường thẳng d đi qua hai điểm A và B gọi là giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

+ Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu $|\overrightarrow{AB}|$, là độ dài của đoạn thẳng AB.

– Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$

– Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

– Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.

– Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$, nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

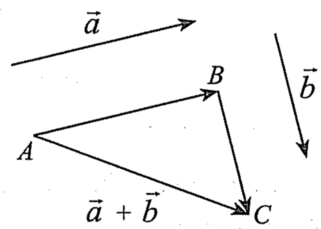
2. Các phép toán vectơ trong không gian

a) *Tổng của hai vectơ*

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lấy điểm A bất kì. Dựng các vectơ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{BC}=\vec{b}$.

Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là *tổng của hai vectơ* $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.

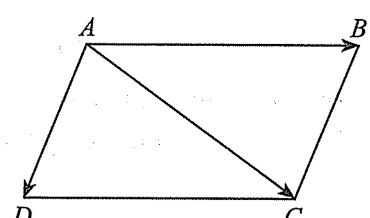


Hình 2

- *Quy tắc cộng*

Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

- *Quy tắc hình bình hành*



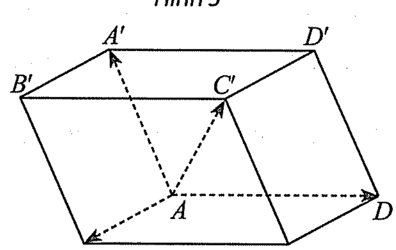
Hình 3

Cho hình bình hành $ABCD$, ta có $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

- *Quy tắc hình hộp*

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.



Hình 4

b) *Hiệu của hai vectơ*

Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là *vectơ đối* của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

Vectơ $\overrightarrow{BA}$ là một vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$, được viết là $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$ được gọi là *hiệu của hai vectơ* $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

- *Quy tắc trừ*

Với ba điểm A, B, O bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

c) *Tích của một số với một vectơ*

Trong không gian, cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

– Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$; ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;

– Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là *phép nhân một số với một vectơ.*

Quy ước: $0.\vec{a} = \vec{0}$ và $k.\vec{0} = \vec{0}$.

Nhận xét:

– Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương là tồn tại số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

– Điều kiện cần để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

Tính chất: Với hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì và hai số x, y, ta có:

$$x(y\vec{a}) = (xy)\vec{a}; \quad (x+y)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}; \quad x(\vec{a}+\vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}.$$

d) *Tích vô hướng của hai vectơ*

Góc giữa hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ là *góc giữa hai vectơ* $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.

Tích vô hướng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Chú ý:

– Quy ước nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

– Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$, ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.

– Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$.

Tính chất: Với ba vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và số thực k, ta có:

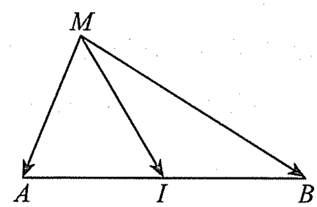
$$\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a};\quad \vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c};\quad (k\vec{a}).\vec{b}=k(\vec{a}.\vec{b})=\vec{a}.(k\vec{b}).$$

e) *Một số kiến thức bổ sung*

Quy tắc trung điểm

Với I là trung điểm của AB, khi đó:

- $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
- Với mọi điểm M thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.



Hình 5

Quy tắc trọng tâm của tam giác

Với G là trọng tâm của tam giác ABC, khi đó:

- $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
- Với mọi điểm M thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Quy tắc trọng tâm tứ diện

Với G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, khi đó:

- $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
- Với mọi điểm M thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$.

Mở rộng: Trong không gian, cho ba điểm A, B, C và bộ số m, n, p $(m+n+p\neq 0)$.

- Tồn tại duy nhất điểm I sao cho $m\overrightarrow{IA}+n\overrightarrow{IB}+p\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.
- Với mọi điểm M thì $m\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+p\overrightarrow{MC}=(m+n+p)\overrightarrow{MI}$.

3. Hệ trục toạ độ trong không gian

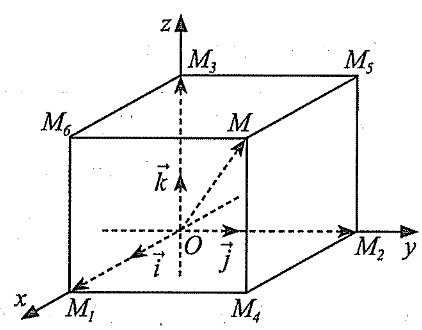
a) *Định nghĩa*

Trong không gian, hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau và các vectơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt trên các trục Ox, Oy, Oz được gọi là *hệ trục toạ độ Descartes vuông góc Oxyz* hay đơn giản là *hệ toạ độ Oxyz*.

– Điểm O được gọi là *gốc toạ độ*.

– Các trục Ox, Oy, Oz được gọi là các *trục toạ độ*.

– Các mặt phẳng phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) được gọi là các *mặt phẳng toạ độ*.



Hình 6

– Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là *không gian Oxyz*.

b) *Toạ độ của điểm, toạ độ của vectơ trong không gian*

– Trong không gian $Oxyz$, cho một điểm M tuỳ ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ được gọi là *toạ độ của điểm M* đối với hệ toạ độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $M=(x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$ trong đó $x; y; z$ tương ứng là hoành độ, tung độ và cao độ của điểm M.

– Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ tuỳ ý. Bộ ba số $(x;\ y;\ z)$ duy nhất sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là *toạ độ của vectơ* $\vec{a}$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$ hoặc $\vec{a}(x;\ y;\ z)$, trong đó $x;\ y;\ z$ tương ứng là hoành độ, tung độ và cao độ của vectơ $\vec{a}$.

c) *Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ*

– Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (x;\ y;\ z)$, $\vec{v} = (x';\ y';\ z')$. Khi đó:

- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z'; \end{cases}$
- $\vec{u} + \vec{v} = (x + x';\ y + y';\ z + z')$;
- $\vec{u} - \vec{v} = (x - x';\ y - y';\ z - z')$;
- $k\vec{u} = (kx;\ ky;\ kz)$, với k là một số thực;
- $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$;
- $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
- $[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right)$;
- $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$.

d) *Áp dụng của toạ độ vectơ*

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, $C(x_C;\ y_C;\ z_C)$. Khi đó:

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A)$;
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$;
- Nếu $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB thì

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2};\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

- Giả sử ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Nếu $G(x_G;\ y_G;\ z_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3};\ y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3};\ z_M = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Trong các câu từ câu 1 đến câu 10, chọn một phương án trả lời đúng.

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Vectơ $\overrightarrow{AI}$ cùng hướng với vectơ nào sau đây?

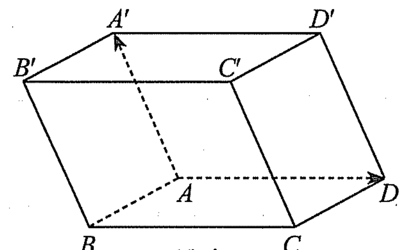
A. $\overrightarrow{BI}$. B. $\overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{CI}$. D. $\overrightarrow{AB}$.

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình 7).

Khi đó, $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$ bằng

A. $\overrightarrow{AD'}$. B. $\overrightarrow{AB'}$.

C. $\overrightarrow{AC'}$. D. $\overrightarrow{AC}$.

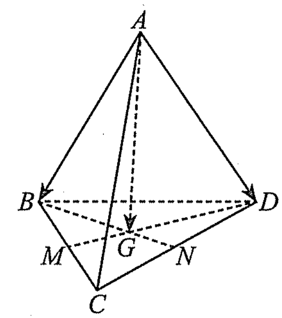


Hình 7

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD (Hình 8). Khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ bằng

A. $6\overrightarrow{AM}$. B. $3\overrightarrow{AN}$.

C. $3\overrightarrow{AG}$. D. $6\overrightarrow{AG}$.

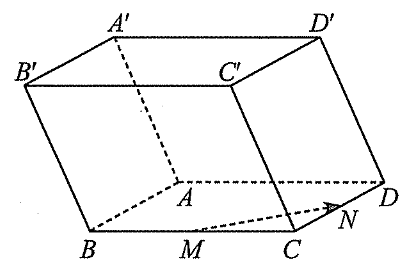


Hình 8

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.\ A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD (Hình 9). Vectơ nào sau đây bằng $2\overrightarrow{MN}$?

A. $\overrightarrow{AD}$. B. $\overrightarrow{A'C'}$.

C. $\overrightarrow{B'D'}$. D. $\overrightarrow{BC}$.



Hình 9

Câu 5. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 2. Khi đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$ bằng

A. 2. B. $-2\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. -2.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (3; -1; 2)$. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ bằng

A. $\sqrt{6}$. B. $\sqrt{14}$. C. 2. D. 4.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; -1; 2)$, $\vec{b} = (2; 3; -3)$. Toạ độ của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ là

A. $(-1; 4; -5)$. B. $(-1; -4; 5)$. C. $(3; 2; -1)$. D. $(2; -3; -6)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (2; -4; 0)$. Toạ độ của vectơ $3\vec{a}$ là

A. $(3; -6; 0)$. B. $(5; -1; 3)$. C. $(1; -2; 0)$. D. $(6; -12; 0)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;-3;1), \vec{b}=(-4;1;-1)$ và $\vec{c}=(-2;-7;1)$. Biết rằng $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$, với x, y là các số thực. Khi đó $x+y$ bằng

A. 5. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(1;-1;2), \vec{b}=(-3;2;-2), \vec{c}=(-2;5;1)$ và $\vec{d}=(-2;-3;-1)$. Biết rằng $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$, với x, y, z là các số thực. Khi đó $x+y+z$ bằng

A. –3. B. –1. C. 1. D. 3.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Trong các câu từ câu 1 đến câu 10, chọn đúng hoặc sai cho mỗi ý a), b), c), d).

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và I là trung điểm của MN. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD (Hình 10).

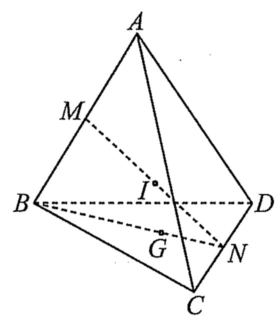
Khi đó:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$.

c) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

d) $3\overrightarrow{AI}-2\overrightarrow{AG}=\vec{0}$.



Hình 10

Câu 2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD (Hình 11).

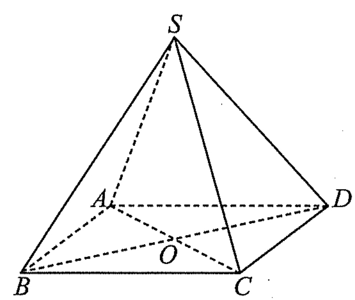
Khi đó:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$.

d) $(\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC}).(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD})=0$.



Hình 11

Câu 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=1$, $AD=2$, $AA'=3$. Gọi M là một điểm trên đoạn CC' sao cho $CM=2MC'$ (Hình 12).

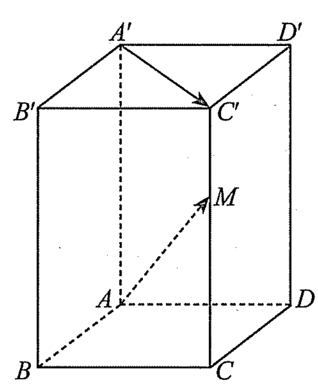
Khi đó:

a) $\overrightarrow{AA'}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CM}$.

b) $\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A'C'}\right)=\dfrac{2}{3}$.

c) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$.

d) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'D}=0$.



Hình 12

Câu 4. Trong không gian *Oxyz*, cho các vectơ

$$\vec{a} = (-2; 3; 1), \vec{b} = (1; -1; 2),\ \vec{c} = (-7; 9; -5) \text{ và } \vec{d} = (7; 5; -1).$$

Khi đó:

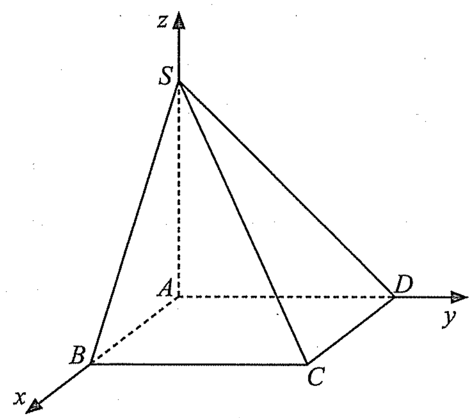
a) $2\vec{a} = (-4; 6; 2)$.

b) $\vec{d} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

c) $\vec{a} + 2\vec{b} = (0; 1; 5)$.

d) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Câu 5. Trong không gian *Oxyz*, cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, cạnh bên *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy (Hình 13). Cho biết $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$ và $S(0; 0; 3)$.



Hình 13

Khi đó:

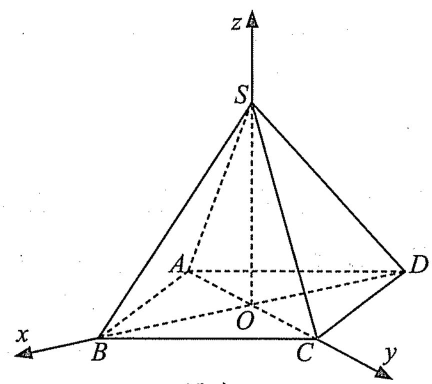
a) Toạ độ của điểm *C* là (2; 0; 3).

b) Diện tích của tam giác *SCD* bằng $3\sqrt{2}$.

c) Hình chiếu vuông góc của điểm *A* trên mặt phẳng (*SCD*) là $H\left(0; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

d) Gọi α là góc giữa đường thẳng *SC* và mặt phẳng (*SBD*), ta có $\sin\alpha > \frac{1}{3}$.

Câu 6. Trong không gian *Oxyz*, cho hình chóp đều *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông tâm *O*, cạnh bằng $2\sqrt{2}$; cạnh bên $SA = 4$ (Hình 14).



Hình 14

Khi đó:

a) Toạ độ của điểm *A* là (0; 2; 0).

b) Trọng tâm của tam giác *SAB* là $G\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

c) Nếu $E(a; 0; b)$ là điểm trên mặt phẳng (*Oxz*) sao cho ba điểm *C*, *E*, *G* thẳng hàng thì $a.b = \sqrt{3}$.

d) Nếu $M(0; m; n)$ là điểm trên mặt phẳng (*Oyz*) sao cho $MG + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $m^2 + n^2 = 1$.

Câu 7. Trong không gian *Oxyz*, cho các điểm $A(-1; 1; -2)$, $B(3; -2; -1)$ và $C(-3; -2; 2)$.

a) Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là (4; –3; 1).

b) Khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng (*Oyz*) bằng 1.

c) Biết rằng tứ giác *ABCD* là hình thang có hai đáy là *AB*, *CD* và $AB = 2CD$. Hoành độ của điểm *D* là $x = -1$.

d) Biết rằng đường thẳng *BC* cắt mặt phẳng (*Oxy*) tại điểm *I*, khi đó $\frac{IB}{IC} = \frac{1}{2}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 1)$, $B(1; 1; -1)$ và $C(2; 0; -3)$.

a) Hình chiếu vuông góc của điểm B lên mặt phẳng (Oxz) có toạ độ là $(1; 0; -1)$.

b) Toạ độ trọng tâm của tam giác ABC là $(2; -1; -1)$.

c) Biết rằng điểm I thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Cao độ của điểm I là $z=-2$.

d) Xét M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxz). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2$ bằng -1.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'(-2; -1; 1)$, $B(1; 3; -2)$, $C(-1; 4; 2)$ và $C'(-1; 3; -3)$.

a) Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{CC'}$ là $(0; -1; -5)$.

b) Cao độ của điểm A là $z = 6$.

c) Diện tích tam giác ABC nhỏ hơn 10.

d) Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\frac{49}{2}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; 2; 1)$, $B(1; 1; 3)$ và $C(-1; 5; 5)$.

a) $AB = 3$.

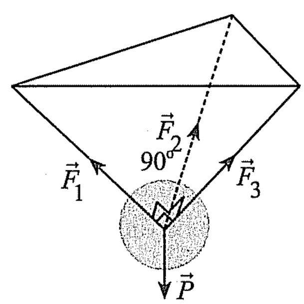
b) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

c) Biết rằng D là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang. Hoành độ điểm D là $x=-\frac{5}{2}$.

d) Biết rằng E là chân đường phân giác của góc A trong tam giác ABC. Hoành độ của điểm E là $x=\frac{1}{4}$.

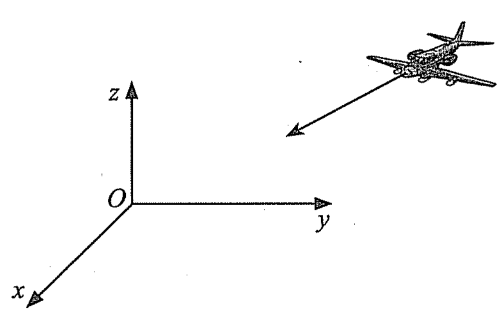
PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Treo một vật nặng có trọng lượng 30 N bởi ba sợi dây giống hệt nhau, các sợi dây đôi một tạo với nhau một góc 90° như Hình 15. Gọi $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ lần lượt là các lực căng của ba sợi dây nói trên. Độ lớn của lực $\overrightarrow{F_1}$ bằng bao nhiêu Niutơn? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.)



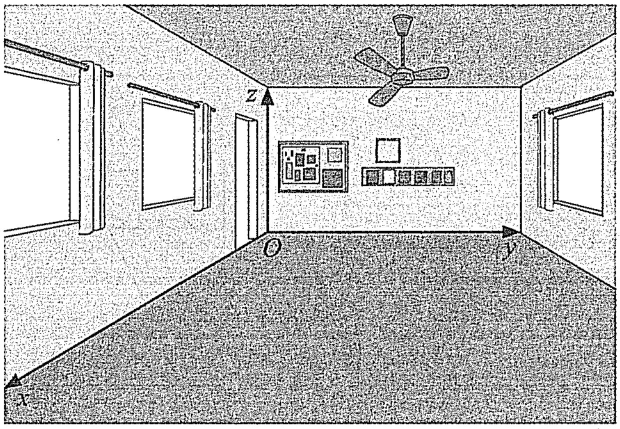
Hình 15

Câu 2. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), một chiếc máy bay đang di chuyển với hướng bay không đổi từ điểm $(-50; 30; 10)$ đến vị trí hạ cánh là $(2; 3; 0)$. Hỏi đường bay của máy bay hợp với mặt đất một góc bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.)

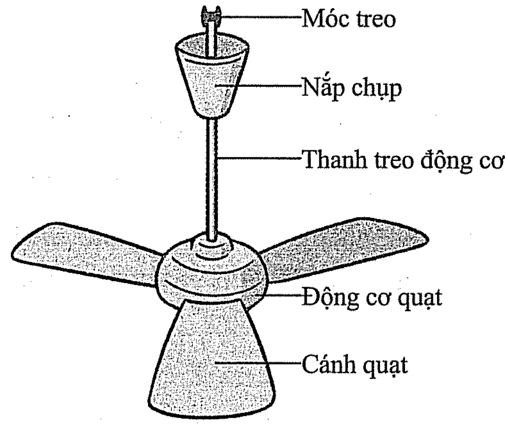


Hình 16

Câu 3. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 10 m; chiều rộng 7,2 m và chiều cao 3,3 m. Một chiếc quạt trần được treo trên trần nhà tại vị trí chính giữa trần nhà của phòng học như hình sau.



a)



b)

Hình 17

Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc toạ độ O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn như Hình 17a (đơn vị đo lấy theo mét). Biết rằng thanh treo động cơ của quạt có độ dài 0,8 m. Giả sử toạ độ của động cơ chiếc quạt trần là $I(a; b; c)$. Khi đó $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Câu 4. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm trong không gian. Sau một khoảng thời gian, chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 3 km về phía Đông và 2 km về phía Nam, đồng thời cách mặt đất 0,5 km; chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía Bắc và 1 km về phía Tây, đồng thời cách mặt đất 0,3 km. Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai khinh khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí người đó đứng có tổng khoảng cách đến hai khinh khí cầu là nhỏ nhất. Hỏi tổng khoảng cách nhỏ nhất ấy bằng bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Câu 5. Trong không gian với $Oxyz$, xét mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2; 0; 0)$, $M(1; 1; 1)$ và cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại hai điểm B, C (B, C khác gốc toạ độ O). Diện tích tam giác ABC nhỏ nhất bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

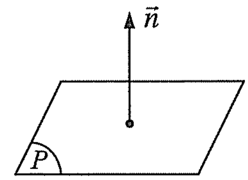
Chủ đề IV. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

A. Phương trình mặt phẳng

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

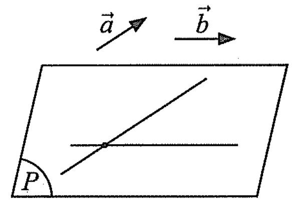
Cho mặt phẳng (P). Nếu vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (P) thì $\vec{n}$ được gọi là *vectơ pháp tuyến* của (P).



Hình 1

2. Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

Cho mặt phẳng (P). Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (P) thì $\vec{a}, \vec{b}$ được gọi là *cặp vectơ chỉ phương* của (P).

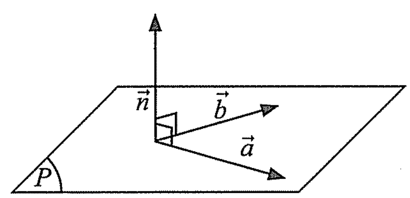


Hình 2

3. Xác định vectơ pháp tuyến của mặt phẳng khi biết một cặp vectơ chỉ phương

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (P) nhận hai vectơ $\vec{a} = (a_1;\, a_2;\, a_3)$, $\vec{b} = (b_1;\, b_2;\, b_3)$ làm cặp vectơ chỉ phương thì (P) nhận vectơ

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$



Hình 3

làm vectơ pháp tuyến.

Vectơ $\vec{n}$ xác định như trên chính là *tích có hướng* (hay tích vectơ) của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Kí hiệu $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ hoặc $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.

4. Khái niệm phương trình tổng quát của mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là *phương trình tổng quát* của mặt phẳng.

Nhận xét:

a) Mỗi phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0) đều xác định một mặt phẳng nhận $\vec{n} = (A;\, B;\, C)$ làm vectơ pháp tuyến.

b) Cho mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó

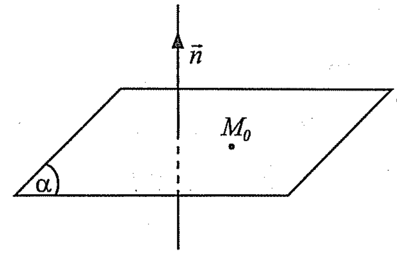
$$M_0(x_0;\, y_0;\, z_0) \in (P) \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

5. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

hay $Ax + By + Cz + D = 0$ với $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.



Hình 4

6. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết cặp vectơ chỉ phương

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}, \vec{b}$, ta thực hiện như sau:

– Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

– Viết phương trình (P) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

7. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau:

– Tìm cặp vectơ chỉ phương, chẳng hạn $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

– Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

– Viết phương trình (P) đi qua điểm A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Nhận xét: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với a, b, c đều khác 0. Khi đó, mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C có phương trình là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Phương trình này được gọi là *phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.*

8. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

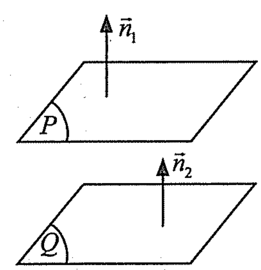
Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ và } (Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.

Khi đó:

- $(P) // (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) = k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$



Hình 5

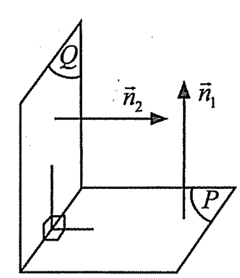
- $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) = k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$

9. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ và } (Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.



Hình 6

Khi đó:

- $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$
- (P), (Q) cắt nhau $\Leftrightarrow (A_1;\ B_1;\ C_1) \neq k(A_2;\ B_2;\ C_2).$

10. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$.

Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (P) được tính theo công thức

$$d(M_0, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

B. Phương trình đường thẳng trong không gian

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d được gọi là *vectơ chỉ phương* của d.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, *phương trình tham số* của đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$ làm vectơ chỉ phương có dạng

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases} \text{ với } t \in \mathbb{R} \text{ (} t \text{ được gọi là tham số).}$$

Chú ý: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$, mỗi giá trị của tham số t xác định duy nhất một điểm M trên d và ngược lại.

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$. Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác 0 thì hệ phương trình

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

gọi là *phương trình chính tắc* của đường thẳng d.

4. Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ và có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = z_A + (z_B - z_A)t. \end{cases}$$

Nếu $x_A \neq x_B, y_A \neq y_B, z_A \neq z_B$ thì d có phương trình chính tắc:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}.$$

5. Điều kiện để hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau

Gọi $\vec{a}=(a_1;\, a_2;\, a_3)$, $\vec{b}=(b_1;\, b_2;\, b_3)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng d, Δ và $M(x_0; y_0; z_0)$ là một điểm trên d.

Ta có:

- $d \,//\, \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}=k\vec{b},\ k\in\mathbb{R} \\ M\notin\Delta; \end{cases}$
- $d \equiv \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}=k\vec{b},\ k\in\mathbb{R} \\ M\in\Delta. \end{cases}$

6. Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau hoặc chéo nhau

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$$d:\begin{cases} x=x_0+a_1t \\ y=y_0+a_2t \\ z=z_0+a_3t \end{cases} (t\in\mathbb{R}) \text{ và } \Delta:\begin{cases} x=x_0'+b_1t' \\ y=y_0'+b_2t' \\ z=z_0'+b_3t' \end{cases} (t'\in\mathbb{R}).$$

Gọi $\vec{a}=(a_1;\, a_2;\, a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;\, b_2;\, b_3)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d và Δ.

Xét hệ phương trình ẩn t và t': $\begin{cases} x_0+a_1t=x_0'+b_1t' \\ y_0+a_2t=y_0'+b_2t' \\ z_0+a_3t=z_0'+b_3t'. \end{cases}$

Ta có:

- d và Δ cắt nhau khi và chỉ khi hệ trên có đúng một nghiệm.
- d và Δ chéo nhau khi và chỉ khi $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương và hệ trên vô nghiệm.

7. Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và Δ có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}=(a_1;\, a_2;\, a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;\, b_2;\, b_3)$.

Ta có: $d\perp\Delta \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$

8. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng d và Δ có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}=(a_1;\, a_2;\, a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;\, b_2;\, b_3)$ được tính bởi công thức:

$$\cos(d,\Delta)=\left|\cos(\vec{a},\vec{b})\right|=\frac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

9. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Góc giữa đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$ được tính bởi công thức:

$$\sin(d,(P)) = |\cos(\vec{a},\vec{n})| = \frac{|\vec{a}.\vec{n}|}{|\vec{a}|.|\vec{n}|} = \frac{|a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

10. Góc giữa hai mặt phẳng

Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{m} = (m_1; m_2; m_3)$ và $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$ được tính bởi công thức:

$$\cos((P),(Q)) = |\cos(\vec{m},\vec{n})| = \frac{|\vec{m}.\vec{n}|}{|\vec{m}|.|\vec{n}|} = \frac{|m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3|}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}.\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

C. Phương trình mặt cầu

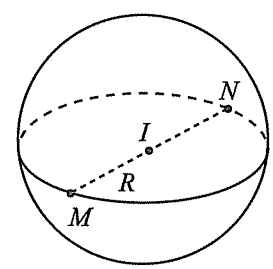
1. Khái niệm mặt cầu

Trong không gian, cho điểm I và số dương R. Mặt cầu tâm I, bán kính R, kí hiệu $S(I; R)$, là tập hợp các điểm M trong không gian thoả mãn $IM = R$.

Đoạn thẳng nối hai điểm thuộc mặt cầu và đi qua tâm I gọi là đường kính của mặt cầu.

Chú ý: Cho mặt cầu $S(I; R)$.

- Nếu $IM = R$ thì M nằm trên mặt cầu.
- Nếu $IM < R$ thì M nằm trong mặt cầu.
- Nếu $IM > R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.



Hình 7

2. Phương trình của mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình là

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Nhận xét: Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Trong các câu từ câu 1 đến câu 34, chọn một phương án trả lời đúng.

A. Phương trình mặt phẳng

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x - z + 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_1 = (2; -1; 1)$. B. $\vec{n}_2 = (2; 0; 1)$. C. $\vec{n}_3 = (2; 0; -1)$. D. $\vec{n}_4 = (2; -1; 0)$.

Câu 2. Trong không $Oxyz$, cho điểm $A(-3;\ 4;\ -2)$ và vectơ $\vec{n}=(-2;3;-4)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và nhận $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là

A. $-3x+4y+2z+26=0$. B. $-2x+3y-4z+29=0$.

C. $2x-3y+4z+29=0$. D. $2x-3y+4z+26=0$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng có phương trình $2x+y-4z-29=0$. Một điểm thuộc mặt phẳng đã cho là

A. $(2;\ 1;\ -6)$. B. $(2;\ 1;\ 6)$. C. $(2;\ 1;-4)$. D. $(-2;\ -1;\ 8)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $A(1;\ 1;\ 0)$ đến mặt phẳng (α): $2x+2y+z-1=0$ bằng

A. 1. B. $\dfrac{4}{3}$. C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(4;\ 0;\ 1)$, $C(-10;\ 5;\ 3)$. Một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC) là

A. $\overrightarrow{AB}=(2;1;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-12;6;0)$. B. $\overrightarrow{AB}=(2;1;2)$, $\overrightarrow{AC}=(12;6;0)$.

C. $\overrightarrow{AB}=(-2;1;2)$, $\overrightarrow{AC}=(12;6;0)$. D. $\overrightarrow{AB}=(2;1;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-12;6;3)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;\ -2;\ 3)$ và song song với mặt phẳng (Q): $2x-3y+z+5=0$ có phương trình là

A. $2x-3y+z-11=0$. B. $2x-3y+z+11=0$.

C. $x-2y+3z-11=0$. D. $x-2y+3z+11=0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây vuông góc với mặt phẳng (P): $4x-14y-z+4=0$?

A. $3x+y-2z+15=0$. B. $4x-14y-z=0$.

C. $3x+y+2z+15=0$. D. $x+y-12z+1=0$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ -3;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 4)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$. B. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$.

C. $2x-3y+4z-1=0$. D. $2x+3y+4z-1=0$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;\ 4;\ 1)$, $B(-1;\ 1;\ 3)$ và mặt phẳng (P): $x-3y+2z-5=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;\ b;\ c)$ với c là số nguyên tố. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 9. B. 3. C. 5. D. 7.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho các mặt phẳng (Q): $x+y+3z=0$, (R): $2x-y+z=0$ và điểm $B(2;\ 1;\ -3)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm B đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (Q) và (R) có phương trình là

A. $4x+5y-3z+22=0$. B. $4x-5y-3z-12=0$.

C. $2x+y-3z-14=0$. D. $4x+5y-3z-22=0$.

Câu 11. Trong không gian *Oxyz*, cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; 1)$. Khoảng cách từ gốc toạ độ đến mặt phẳng (*ABC*) bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. B. $-\dfrac{2}{3}$. C. $\dfrac{2}{3}$. D. $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Câu 12. Trong không gian *Oxyz*, cho ba điểm $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (*ABC*) là

A. $\vec{n}_1 = (0; -4; -2)$. B. $\vec{n}_2 = (0; 4; -2)$. C. $\vec{n}_3 = (1; -1; 2)$. D. $\vec{n}_4 = (0; -2; 4)$.

B. Phương trình đường thẳng trong không gian

Câu 13. Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - t. \end{cases}$

Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ?

A. $\vec{u}_1 = (1; -2; 3)$. B. $\vec{u}_2 = (1; 2; -1)$. C. $\vec{u}_3 = (1; 2; 1)$. D. $\vec{u}_4 = (2; 0; 2)$.

Câu 14. Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng Δ?

A. $M(1; 2; -1)$. B. $N(2; 0; 2)$. C. $P(-1; 2; 5)$. D. $Q(1; -2; 2)$.

Câu 15. Cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và $d': \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+2}{-2}$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. *d*, *d'* song song với nhau. B. *d*, *d'* chéo nhau.

C. *d*, *d'* trùng nhau. D. *d*, *d'* cắt nhau.

Câu 16. Trong không gian *Oxyz*, phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(2; 3; -1)$ và $B(2; 3; -2)$ là

A. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -1 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

C. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + t \\ z = -1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 \\ z = -1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Câu 17. Trong không gian *Oxyz*, cho hai mặt phẳng (α): $2x + 2y + z = 0$ và (β): $x + z + \sqrt{3} = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là

A. 30°. B. 90°. C. 45°. D. 60°.

Câu 18. Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-8}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{m-1}$ $(m \neq 1)$ và điểm $M(6; -6; 6)$ sao cho M thuộc Δ. Giá trị của m bằng

A. -2. B. 2. C. 4. D. -4.

Câu 19. Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng $d: \frac{x-4}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ và mặt phẳng (P): $3x - 2y + z - 6 = 0$. Giá trị của $\sin(d, (P))$ bằng

A. $\frac{4\sqrt{6}}{21}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{42}$. C. $\frac{4\sqrt{6}}{21}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 20. Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+1}{1}$ và $\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2 \\ z = 2+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Góc giữa hai đường thẳng d và Δ bằng

A. 90°. B. 60°. C. 45°. D. 30°.

Câu 21. Trong không gian *Oxyz*, đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1; 1; 0)$ và $B(3; 2; -1)$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{a} = (2; 1; 1)$. B. $\vec{u} = (4; 1; -1)$. C. $\vec{b} = (2; 1; -1)$. D. $\vec{v} = (4; 1; 1)$.

Câu 22. Trong không gian *Oxyz*, đường thẳng đi qua $A(3; 2; -1)$ và vuông góc với mặt phẳng (α): $x - 2y + z - 1 = 0$ có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$. B. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$.

C. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$. D. $\frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

Câu 23. Trong không gian *Oxyz*, đường thẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và song song với đường thẳng d: $\frac{x}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$ có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{3}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{2}$.

C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$. D. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{-2}$.

Câu 24. Trong không gian *Oxyz*, phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1; -2; 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; -1)$ là

A. $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+3t \\ z = 4-t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. B. $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+3t \\ z = 4+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

C. $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-2t \\ z = -1+4t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. D. $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+2t \\ z = -1+4t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

C. Phương trình mặt cầu

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4; -2; 1)$ và $B(0; -2; -1)$. Phương trình mặt cầu có đường kính AB là

A. $(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=5$.
B. $(x+2)^2+(y-2)^2+z^2=5$.
C. $(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=13$.
D. $(x+2)^2+(y-2)^2+z^2=13$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(a; b; c)$ và bán kính R. Phương trình của (S) là

A. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.
B. $(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2=R^2$.
C. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R$.
D. $(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2=R$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+2z-1=0$. Tâm của (S) có toạ độ là

A. $(-1; 0; 1)$.
B. $(1; 0; -1)$.
C. $(-1; 1; 0)$.
D. $(1; -1; 0)$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z+3=0$.
B. $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z+9=0$.
C. $x^2+y^2+z^2+4x-2y+4z+9=0$.
D. $x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+19=0$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(0; -3; 1)$ và $R=2$. Mặt cầu tâm I, bán kính R có phương trình là

A. $x^2+(y+3)^2+(z-1)^2=4$.
B. $x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=4$.
C. $x^2+(y+3)^2+(z-1)^2=2$.
D. $x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=2$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình của một mặt cầu khi và chỉ khi

A. $a^2+b^2+c^2-d>0$.
B. $a^2+b^2+c^2+d>0$.
C. $a^2+b^2+c^2+d\geq 0$.
D. $a^2+b^2+c^2-d\geq 0$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$. Toạ độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đã cho lần lượt là

A. $I(1; -2; 3)$, $R=5$.
B. $I(1; 2; -3)$, $R=5$.
C. $I(-1; -2; 3)$, $R=5$.
D. $I(1; -2; -3)$, $R=5$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu tâm $I(-2; 1; 5)$, bán kính bằng 3. Điểm nào dưới đây thuộc mặt cầu đã cho?

A. $C(0; 3; 4)$.
B. $A(10; 1; 2)$.
C. $B(0; 1; 4)$.
D. $D(0; 2; 1)$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 4$. Toạ độ tâm I và bán kính R của (S) lần lượt là

A. $I(0; -3; 1)$, $R = 1$.
B. $I(0; 3; -1)$, $R = 4$.
C. $I(0; -3; 1)$, $R = 2$.
D. $I(0; 3; -1)$, $R = 2$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Ox và đi qua hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(4; -6; 2)$ là

A. $(x-7)^2 + y^2 + z^2 = 49$.
B. $(x+6)^2 + y^2 + z^2 = 36$.
C. $(x+7)^2 + y^2 + z^2 = 49$.
D. $(x-6)^2 + y^2 + z^2 = 36$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Trong các câu từ câu 1 đến câu 10, chọn đúng hoặc sai cho mỗi ý a), b), c), d).

A. Phương trình mặt phẳng

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $D(-2; 1; -1)$.

a) Phương trình tổng quát của mặt phẳng (BCD) là $x - 2y - 2z + 2 = 0$.

b) Điểm B thuộc mặt phẳng (ACD).

c) Độ dài đường cao của hình chóp $A.BCD$ bằng 3.

d) Mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với hai mặt phẳng (ACD), (BCD) có phương trình tổng quát là $x - y + 2z + 1 = 0$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$.

a) Mặt phẳng $(A'B'C'D')$ có phương trình tổng quát là $x - z - 9 = 0$.

b) Mặt phẳng $(AB'D')$ có phương trình tổng quát là $2x + y - 2 = 0$.

c) Chiều cao của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $\sqrt{2}$.

d) Chiều cao của hình chóp $C.ABC'D'$ bằng $\dfrac{9}{\sqrt{206}}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 1)$ và ba mặt phẳng (α): $x + 2y - 3z + 2 = 0$, (β): $x + 2z - 5 = 0$, (γ): $4x - 3y - 2z + 1 = 0$.

a) Điểm A thuộc mặt phẳng (α).

b) Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β).

c) Mặt phẳng (β) vuông góc với mặt phẳng (γ).

d) Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với hai mặt phẳng (α), (γ) có phương trình tổng quát là $13x + 10y + 11z - 47 = 0$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 3; -2)$ và hai mặt phẳng (P): $2x - y + 3z + 4 = 0$, (Q): $4x - 2y + 6z - 1 = 0$.

a) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{15}{\sqrt{56}}$.

b) Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q).

c) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\dfrac{9\sqrt{56}}{56}$.

d) Mặt phẳng qua điểm M và song song với mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát là $2x - y + 3z - 10 = 0$.

B. Phương trình đường thẳng trong không gian

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $D(-2; 1; -1)$.

a) Đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có vectơ chỉ phương là $\vec{n} = (1; 2; -2)$.

b) Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $45°$.

c) Góc (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng $55°$.

d) Chiều cao của hình chóp $A.BCD$ là AH với H thuộc mặt phẳng (BCD). Toạ độ của điểm H là $H\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; -6)$ và mặt phẳng (P): $4x - y + 2z + 13 = 0$.

a) Đường thẳng AB và mặt phẳng (P) cắt nhau tại B.

b) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{a} = (1; 1; 9)$.

c) Góc (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P) là $30°$.

d) Đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 3)$, $B(0; 1; -1)$, $C(3; -2; 5)$.

a) Đường thẳng đi qua điểm B và trung điểm I của đoạn thẳng AC có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BI} = (2; -2; 3)$.

b) Đường thẳng BC có một vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1; -1; 2)$.

c) Góc giữa hai đường thẳng AB và AC là góc A của tam giác ABC.

d) Toạ độ của điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC là $H\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Câu 8. Cho hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ và $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = -2+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

a) Hai đường thẳng d và Δ vuông góc với nhau.

b) Hai đường thẳng d và Δ chéo nhau.

c) Góc giữa hai đường thẳng d và Δ là 90°.

d) Mặt phẳng chứa d và song song với Δ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

C. Phương trình mặt cầu

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 13$ có tâm I. Gọi B là điểm trên tia Oz sao cho B thuộc mặt cầu (S).

a) Tâm I của mặt cầu (S) có toạ độ là $(2; 0; -1)$.

b) Bán kính của mặt cầu (S) bằng $\sqrt{13}$.

c) Toạ độ của điểm $B(0; 0; -2)$.

d) Phương trình đường thẳng IB: $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = 0 \\ z = 1+3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Câu 10. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3$, $AD = 4$, $AA' = 5$. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho đỉnh A trùng với gốc toạ độ O, đỉnh B thuộc tia Ox, đỉnh D thuộc tia Oz. Gọi I là trung điểm của CA'.

a) Toạ độ của đỉnh $B(-3; 0; 0)$.

b) Các đỉnh của hình hộp chữ nhật thuộc mặt cầu tâm I.

c) Toạ độ của điểm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 2\right)$.

d) Phương trình mặt cầu tâm I, bán kính IB là $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + (x-2)^2 = \frac{25}{2}$.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

A. Phương trình mặt phẳng

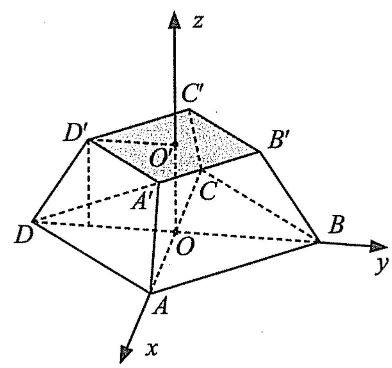
Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(5; 4; 3)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz các đoạn bằng nhau có phương trình là $x + ay + bz + c = 0$. Tìm giá trị của c.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(0; 1; -1)$, $B(1; 1; 2)$, $C(1; -1; 0)$, $D(0; 0; 1)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (BCD) và đi qua điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM}$ là $ax + y - z + m = 0$. Tìm giá trị của $a - m$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 3)$, $B(3; 0; -1)$ và mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z + 8 = 0$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB, điểm $M(a; b; c)$ thuộc (P) sao cho M là hình chiếu vuông góc của I trên (P). Tính giá trị của $a + b + c$.

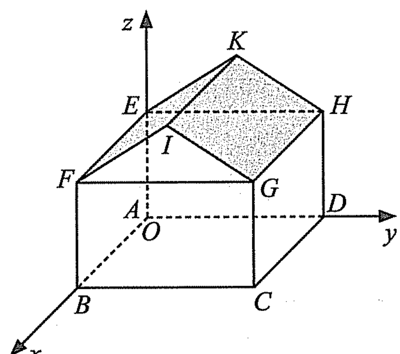
Câu 4. Một vật trang trí có đế dạng khối chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao 3 cm, $AB = 8\sqrt{2}$ cm, $A'B' = 6\sqrt{2}$ cm (Hình 8). Gọi O là giao điểm của AC và BD, O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.

Với hệ trục toạ độ như Hình 8, mặt phẳng $(CDD'C')$ cắt tia Oz tại điểm $M(0; 0; m)$. Tìm giá trị của m.



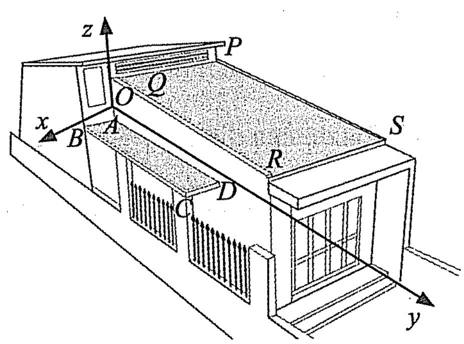
Hình 8

Câu 5. Hình 9 minh hoạ một nhà kho trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét) và hai mái $EFIK$, $HGIK$ có kích thước bằng nhau. Biết rằng chiều cao của nhà kho là 9 m và các bức tường của nhà kho tạo thành hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ với $AB = 10$ m, $AC = 24$ m, $AE = 7$ m. Mặt phẳng $(EFIK)$ có phương trình $ax + y + bz + c = 0$. Tìm giá trị của $a - bc$.



Hình 9

Câu 6. Hình 10 vẽ minh hoạ mái hiên $ABCD$ song song với mái nhà $PQRS$ trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (mái hiên và mái nhà đều phẳng) có $Q(-10; 0; 200)$, $P(-490; 0; 200)$, $R(0; 1600; 0)$, $A(0; 0; -65)$. Mặt phẳng $(ABCD)$ có phương trình $y + az + 65a = 0$. Tìm giá trị của a.

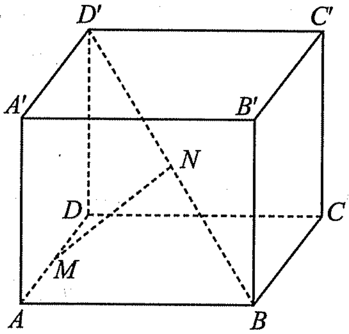


Hình 10

B. Phương trình đường thẳng trong không gian

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x - y + z - 2 = 0$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ và điểm $A(2; -1; 1)$. Biết rằng điểm $B(a; b; c)$ thuộc (P) sao cho đường thẳng AB song song với đường thẳng d. Tính giá trị của $2a + b^2 + c^2$.

Câu 8. Có một chiếc lồng bằng sắt dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$ m, $AD = 3$ m, $AA' = 1$ m. Người thợ hàn muốn hàn một thanh sắt MN nối hai đoạn AD và BD' (Hình 11). Tính chiều dài ngắn nhất của đoạn thanh sắt MN. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét.

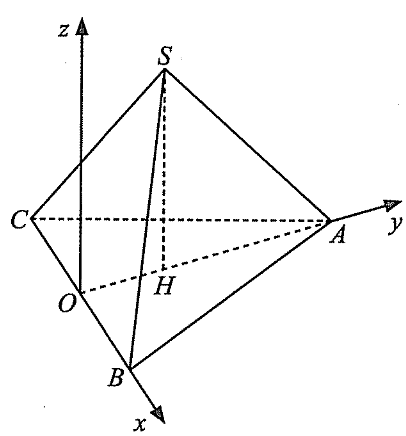


Hình 11

Câu 9. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB'. Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

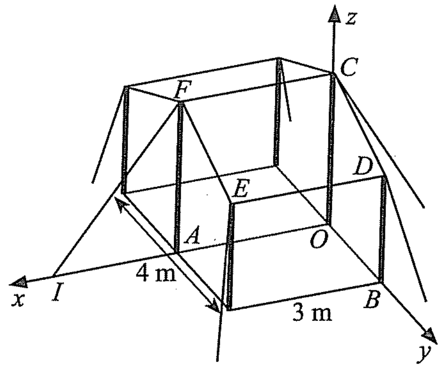
Câu 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi O là giao điểm của AC và BD; M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC. Biết $MN = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 11. Một vật trang trí kim tự tháp dạng hình chóp tam giác đều có chiều cao 110 mm và đáy là tam giác đều cạnh 120 mm được vẽ lại như Hình 12. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho gốc toạ độ O trùng với trung điểm của cạnh đáy BC, đỉnh B thuộc tia Ox và đỉnh A thuộc tia Oy. Tính côsin của góc giữa hai mặt bên của vật trang trí đó.



Hình 12

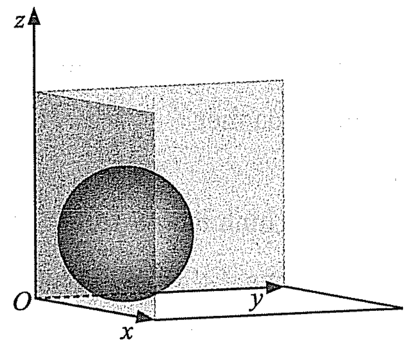
Câu 12. Một lều trại có mặt trước và mặt sau rộng 4 m, hai mặt bên rộng 3 m gồm sáu thanh cọc tre, vải bạt chống thấm nước, dây dù hoặc dây thừng để cố định lều tại sáu cọc sắt cắm sát đất như Hình 13. Biết rằng, hai thanh AF, OC có chiều dài 2,2 m; bốn thanh còn lại có chiều dài 1,7 m và đoạn dây thừng $IF = 3$ m. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ và cho biết góc giữa đường thẳng chứa dây thừng IF và mặt phẳng chứa tấm bạt $(CDEF)$ là a°. Tính giá trị của a. Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ.



Hình 13

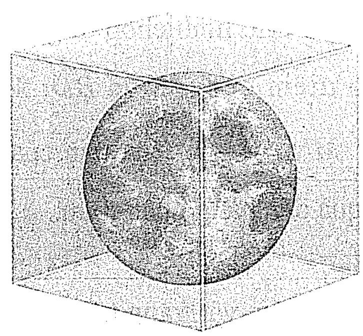
C. Phương trình mặt cầu

Câu 13. Hai quả bóng dạng hình cầu có kích thước khác nhau lần lượt đặt vào góc một căn nhà hình hộp chữ nhật sao cho quả bóng tiếp xúc với hai bức tường và nền của căn nhà đó. Trên bề mặt của mỗi quả bóng, tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường quả bóng tiếp xúc và đến nền nhà lần lượt là 2; 3; 1. Tính tổng độ dài các đường kính của hai quả bóng đó.



Hình 14

Câu 14. Trong khối pha lê hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 8 cm có mặt cầu cách đều các mặt của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ một khoảng 1 cm. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho đỉnh A trùng với gốc toạ độ O, đỉnh B thuộc tia Ox, đỉnh D thuộc tia Oy, đỉnh A' thuộc tia Oz. Khi đó, phương trình của mặt cầu bên trong khối pha lê hình lập phương là $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$. Tìm giá trị của $a + b + c + d$.


Hình 15

Chủ đề V. THỐNG KÊ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các số đặc trưng của mẫu số liệu không ghép nhóm

a) Trung bình, mốt, phương sai và độ lệch chuẩn

- Giả sử ta có một mẫu số liệu là $x_1, x_2, ..., x_n$.

Cỡ mẫu của dãy số liệu trên là n.

Số trung bình (hay *số trung bình cộng*) của mẫu số liệu này, kí hiệu $\overline{x}$, được tính bởi công thức

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Phương sai của mẫu số liệu này, kí hiệu S^2, được tính bởi công thức

$$S^2 = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2\right] = \frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - \overline{x}^2.$$

Độ lệch chuẩn, kí hiệu S, là căn bậc hai của phương sai.

- Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Khi đó, công thức tính số trung bình trở thành

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k}{n},$$

trong đó cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Công thức tính phương sai trở thành

$$S^2 = \frac{1}{n}\left[n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_k(x_k - \overline{x})^2\right]$$
$$= \frac{1}{n}(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \cdots + n_kx_k^2) - \overline{x}^2.$$

Chú ý: Kí hiệu $f_k = \frac{n_k}{n}$ là tần số tương đối (hay còn gọi là tần suất) của x_k trong mẫu số liệu.
Khi đó, số trung bình còn có thể biểu diễn là

$$\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_kx_k.$$

Mốt là giá trị có tần số lớn nhất của mẫu số liệu. Một mẫu số liệu có thể không có mốt, có một mốt hoặc có nhiều mốt.

b) Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị

Sắp xếp lại mẫu số liệu $x_1, x_2, ..., x_n$ theo thứ tự không giảm, ta được dãy

$$x_1^* \leq x_2^* \leq ... \leq x_n^*.$$

Khoảng biến thiên của một mẫu số liệu, kí hiệu R, là hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó, tức là:

$$x_n^* - x_1^*.$$

Số trung vị của mẫu $x_1, x_2, ..., x_n$ là giá trị ở chính giữa dãy $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$. Cụ thể:

– Nếu $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, thì số trung vị mẫu là x_{k+1}^*.

– Nếu $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, thì số trung vị mẫu là $\frac{1}{2}(x_k^* + x_{k+1}^*)$.

Tứ phân vị của một mẫu số liệu gồm 3 giá trị, đó là *tứ phân vị thứ nhất, thứ hai và thứ ba* (lần lượt kí hiệu là Q_1, Q_2, Q_3). Ba giá trị này chia tập hợp dữ liệu đã sắp xếp thành bốn phần đều nhau. Cụ thể:

– Giá trị tứ phân vị thứ hai, Q_2, chính là số trung vị của mẫu.

– Giá trị tứ phân vị thứ nhất, Q_1, là số trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

– Giá trị tứ phân vị thứ ba, Q_3, là số trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

Khoảng tứ phân vị, kí hiệu Δ_Q, là hiệu giữa Q_3 và Q_1, tức là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

Một giá trị của mẫu số liệu được gọi là *giá trị ngoại lệ* hay *giá trị bất thường* nếu nó nhỏ hơn $Q_1 - 1,5\Delta_Q$ hoặc lớn hơn $Q_3 + 1,5\Delta_Q$.

2. Các số đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm

a) Số liệu ghép nhóm

Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng tần số ghép nhóm có dạng như dưới đây.

Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm giá trị đại diện cho nhóm đó.

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	...	$[u_k; u_{k+1}]$
Giá trị đại diện	c_1	c_2	...	c_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Với $c_j = \dfrac{u_j + u_{j+1}}{2}$.

b) Trung bình, mốt, phương sai và độ lệch chuẩn

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\overline{x}$, được tính như sau:

$$\overline{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + ... + n_kc_k}{n} \text{ với cỡ mẫu } n = n_1 + n_2 + ... + n_k.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S^2, được tính bởi công thức

$$S^2 = \frac{1}{n}\left[n_1(c_1 - \overline{x})^2 + n_2(c_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_k(c_k - \overline{x})^2\right] = \frac{1}{n}(n_1c_1^2 + ... + n_kc_k^2) - \overline{x}^2.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S = \sqrt{S^2}$.

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm có tần số lớn nhất.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm được dùng đại diện cho giá trị có tần số xuất hiện cao nhất. Giả sử nhóm chứa mốt là $[u_m; u_{m+1})$, khi đó mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_o, được xác định bởi công thức

$$M_o = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Chú ý: Nếu không có nhóm kề trước của nhóm chứa mốt thì $n_{m-1} = 0$. Ngược lại, nếu không có nhóm kề sau của nhóm chứa mốt thì $n_{m+1} = 0$.

Một mẫu số liệu có thể có nhiều nhóm chứa mốt và có nhiều mốt.

c) Khoảng biến thiên và tứ phân vị

Khoảng biến thiên, kí hiệu R, của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu số giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên có chứa dữ liệu của mẫu số liệu.

Nếu n_1 *và* n_k cùng khác 0 thì $R = u_{k+1} - u_1$.

Tứ phân vị thứ i, kí hiệu Q_i, với $i = 1, 2, 3$ của mẫu số liệu ghép nhóm được xác định như sau:

$$Q_i = u_m + \frac{\frac{in}{4} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m),$$

trong đó:

- $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ là cỡ mẫu;
- $[u_m; u_{m+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ i;
- n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ i;
- $C = n_1 + n_2 + ... + n_{m-1}$.

Tứ phân vị thứ hai, Q_2, chính là *trung vị* M_e của mẫu số liệu ghép nhóm.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

Một giá trị của mẫu số liệu ghép nhóm được gọi là *giá trị ngoại lệ* hay *giá trị bất thường* nếu nó nhỏ hơn $Q_1 - 1,5\Delta_Q$ hoặc lớn hơn $Q_3 + 1,5\Delta_Q$.

Chú ý: Nếu tứ phân vị thứ k là $\frac{1}{2}(x_m + x_{m+1})$, trong đó x_m và x_{m+1} thuộc hai nhóm liên tiếp, chẳng hạn $x_m \in [u_{j-1}; u_j)$ và $x_{m+1} \in [u_j; u_{j+1})$, thì $Q_k = u_j$.

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Trong các câu từ câu 1 đến câu 20, chọn một phương án trả lời đúng.

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu 1 – 5.

Trong giờ học Vật lí, 10 bạn học sinh thực hành đo cường độ của một dòng điện. Kết quả được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: mA).

25	30	30	25	30	20	25	25	30	25

Câu 1. Khoảng biến thiên (đơn vị: mA) của mẫu số liệu trên là

A. 25. B. 5. C. 30. D. 10.

Câu 2. Mốt của mẫu số liệu trên là

A. 5. B. 4. C. 25. D. 30.

Câu 3. Trung vị của mẫu số liệu trên là

A. 26,5. B. 25. C. 20. D. 30.

Câu 4. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là

A. 5. B. 10. C. 20. D. 30.

Câu 5. Phương sai của mẫu số liệu trên là

A. 10. B. 10,25. C. 10,5. D. 10,75.

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu 6 – 10.

Bảng dưới đây ghi lại cân nặng của 20 quả mãng cầu được lựa chọn ngẫu nhiên từ một lô hàng (đơn vị: kg).

1,50	1,50	1,50	1,55	1,60	1,65	1,65	1,70	1,75	1,80
1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	2,05	2,05	2,10	2,10	2,10

Câu 6. Khoảng biến thiên (đơn vị: kg) của mẫu số liệu trên là

A. 0,4. B. 0,5 C. 0,6. D. 0,7.

Câu 7. Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên là

A. 1,625. B. 1,8. C. 1,805. D. 2,025.

Câu 8. Mốt của mẫu số liệu trên là

A. 3. B. 1,50. C. 2,10. D. 1,50 và 2,10.

Câu 9. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là

A. 0,4. B. 0,5. C. 0,6 D. 0,7.

Câu 10. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên thuộc nửa khoảng

A. [0,2; 0,3). B. [0,3; 0,4). C. [0,04; 0,05). D. [0,03; 0,04).

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu 11 – 15.

Bảng dưới đây ghi lại tốc độ của một số chiếc xe ô tô khi đi qua một điểm đo tốc độ.

Tốc độ (km/h)	[50; 52)	[52; 54)	[54; 56)	[56; 58)	[58; 60)
Số xe ô tô	40	32	25	20	8

Câu 11. Khoảng biến thiên (đơn vị: km/h) của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 8. B. 10. C. 6. D. 12.

Câu 12. Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. [50; 52). B. [52; 54). C. [54; 56). D. [58; 60).

Câu 13. Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần trăm) là

A. 51. B. 51,33. C. 51,67. D. 51,85.

Câu 14. Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 55,675. B. 52,26. C. 55,74. D. 54,87.

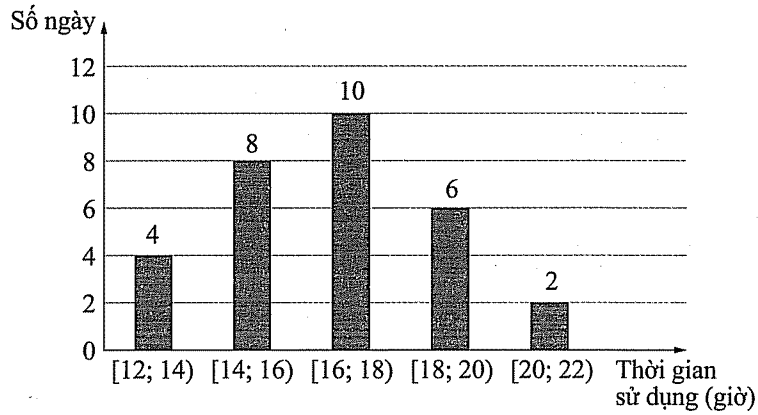
Câu 15. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần nghìn) là

A. 6,329. B. 6,328. C. 2,515. D. 2,516.

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu 16 – 20.

Bác Minh thống kê lại thời gian sử dụng điện thoại của mình từ khi điện thoại được sạc đầy pin cho đến khi pin được sử dụng hết trong 30 ngày ở biểu đồ sau.

Biểu đồ tần số theo thời gian sử dụng



Câu 16. Khoảng chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. [12; 14). B. [14; 16). C. [16; 18). D. [18; 20).

Câu 17. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 16,5. B. 16,6. C. 15,5. D. 15,4.

Câu 18. Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 14,875. B. 14,4375. C. 13,125. D. 13,5625.

Câu 19. Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 16,5. B. 16,6. C. 15,5. D. 15,4.

Câu 20. Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần nghìn) là

A. 24,079. B. 2,215. C. 4,906. D. 4,907.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Trong các câu từ câu 1 đến câu 5, chọn đúng hoặc sai cho mỗi ý a), b), c), d).

Câu 1. Bảng dưới đây biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về cân nặng của một số quả dứa được lựa chọn ngẫu nhiên từ một lô hàng (đơn vị: gam).

Nhóm	[1 750; 1 770)	[1 770; 1 790)	[1 790; 1 810)	[1 810; 1 830)	[1 830; 1 850)
Tần số	12	25	38	20	5

a) Cỡ mẫu của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $n = 100$.

b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 100 gam.

c) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $Q_3 = 1\,830$.

d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $\Delta_Q = 29,6$.

Câu 2. Trong giờ thực hành môn Sinh học, các học sinh đo đường kính nhân một tế bào nhiều lần. Kết quả được thống kê lại ở bảng sau.

Đường kính (μm)	[4,5; 5,0)	[5,0; 5,5)	[5,5; 6,0)	[6,0; 6,5)
Số lần đo	2	16	20	2

a) Cỡ mẫu của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $n = 50$.

b) Tần số tương đối của nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là 40%.

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $\Delta_Q = 0,45$.

d) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên thuộc khoảng (0; 0,1).

Câu 3. Trong một buổi đi thực tế, một nhóm học sinh đã ước lượng chiều dài thân của một số cá thể cào cào và ghi lại trong bảng số liệu sau (đơn vị: cm).

Độ dài (cm)	[3,5; 4,5)	[4,5; 5,5)	[5,5; 6,5)	[6,5; 7,5)
Số con	5	18	20	7

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 4 cm.

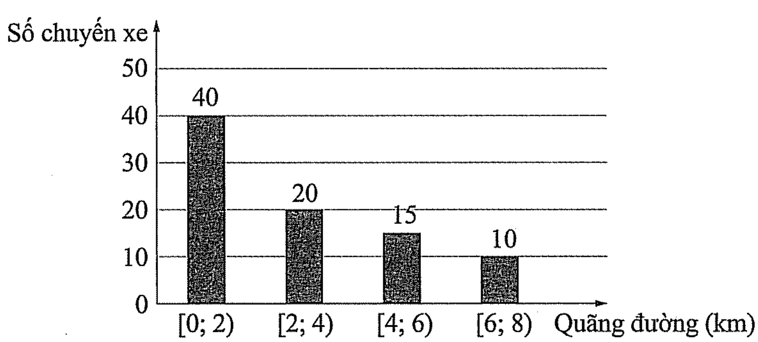
b) Khoảng chứa mốt chiếm 40% tổng số các giá trị của mẫu.

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $\Delta_Q = 2$.

d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên thuộc khoảng (0,5; 1).

Câu 4. Một bác tài xế đã thống kê lại quãng đường di chuyển của một số chuyến xe mà bác ấy thực hiện trong một tuần ở bảng sau (đơn vị: km).

Biểu đồ tần số chuyến xe theo quãng đường di chuyển



a) Bác tài xế đã thống kê lại quãng đường di chuyển của 85 chuyến xe.

b) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm trên thuộc nhóm [4; 6).

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 8 km.

d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên có giá trị thuộc khoảng (1; 2).

Câu 5. Huấn luyện viên thống kê thời gian chạy cự li 200 m của hai vận động viên Hoa và Mai trong một đợt huấn luyện ở bảng sau.

Thời gian (giây)	[23,7; 23,8)	[23,8; 23,9)	[23,9; 24)	[24; 24,1)	[24,1; 24,2)
Số lần chạy của Hoa	11	15	7	0	5
Số lần chạy của Mai	28	18	4	0	0

a) Khoảng biến thiên thời gian chạy của hai vận động viên là như nhau.

b) Thành tích trung bình của Hoa đạt dưới 23,9 giây.

c) Nếu so sánh theo số trung bình thì thành tích của Hoa tốt hơn của Mai.

d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì Mai có thành tích ổn định hơn Hoa.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Bảng dưới đây thống kê nhiệt độ không khí trung bình của các tháng trong năm tại một trạm đo đạc (đơn vị: °C).

Nhiệt độ (°C)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Số tháng	3	4	4	1

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Câu 2. Trong giờ thực hành trải nghiệm môn Toán, một nhóm học sinh thực hành đo chiều cao của một toà nhà trong khu vực (đơn vị: m). Kết quả các lần đo được thống kê lại ở bảng sau.

Chiều cao (m)	[25,1; 25,3)	[25,3; 25, 5)	[25,5; 25,7)	[25,7; 25,9)
Số lần đo	10	20	6	4

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Câu 3. Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước sạch mỗi hộ gia đình ở một khu vực sử dụng trong tháng 01/2023 ở bảng sau (đơn vị: m^3).

Lượng nước (m^3)	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số hộ gia đình	23	50	35	25	7

Tính tỉ số giữa số trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên. Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

Câu 4. Bảng dưới đây thống kê lượng điện năng tiêu thụ trong tháng 01/2023 của một số hộ gia đình trong một khu tập thể (đơn vị: kWh).

250	250	255	262	266	271	274	279	282	288

Bạn Tuấn ghép số liệu trên thành 4 nhóm có độ dài bằng nhau với nhóm đầu tiên là [250; 260). Tính hiệu của độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 5. Bảng dưới đây thống kê giá đóng cửa của một cổ phiếu trong một số ngày giao dịch liên tiếp (đơn vị: nghìn đồng).

95,1	95,8	96,2	95,5	96	97,3	97,3	97,4	91,1	89,5	88,9	89,5

Bạn Hồng ghép số liệu trên thành 4 nhóm có độ dài bằng nhau với nhóm đầu tiên là [88,5; 91). Tính hiệu của khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc.

Chủ đề VI. XÁC SUẤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Xác suất cổ điển

• *Phép thử ngẫu nhiên* (gọi tắt là phép thử) là một hoạt động mà ta không thể biết trước được kết quả của nó.

Tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử ngẫu nhiên được gọi là *không gian mẫu*, kí hiệu là Ω.

Mỗi tập con của không gian mẫu được gọi là một *biến cố*, kí hiệu là A, B, C, ...

Một kết quả thuộc A được gọi là kết quả làm cho A xảy ra, hoặc *kết quả thuận lợi* cho A.

• Giả sử một phép thử có không gian mẫu Ω gồm hữu hạn các kết quả của phép thử có cùng khả năng xảy ra.

Nếu A là một biến cố liên quan đến phép thử thì *xác suất của biến cố A* là một số, kí hiệu $P(A)$, được xác định bởi công thức:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{\text{Số kết quả thuận lợi cho } A}{\text{Tổng số kết quả có thể xảy ra}}.$$

• Biến cố "Không xảy ra A", kí hiệu $\overline{A}$, được gọi là *biến cố đối* của A. Ta nói A và $\overline{A}$ là *hai biến cố đối nhau* và

$$P(\overline{A})+P(A)=1.$$

• Cho hai biến cố A và B.

– Biến cố "Cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu AB hoặc $A \cap B$, được gọi là *biến cố giao* của A và B.

– Biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu $A \cup B$, được gọi là *biến cố hợp* của A và B.

– Hai biến cố A và B được gọi là *xung khắc* nếu biến cố giao AB không thể xảy ra.

• **Quy tắc tính xác suất**

– ***Quy tắc cộng xác suất***

Với hai biến cố xung khắc A và B, ta có

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B).$$

Nếu A và B là hai biến cố bất kì thì $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

– Hai biến cố A và B được gọi là *độc lập* với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

– ***Quy tắc nhân xác suất cho hai biến cố độc lập***

Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

2. Xác suất có điều kiện

• **Định nghĩa xác suất có điều kiện**

Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A khi biến cố B xảy ra được gọi là *xác suất của A với điều kiện B*, kí hiệu là $P(A|B)$. Khi $P(B) > 0$ thì

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

• **Công thức xác suất toàn phần**

$$P(A) = P(B)P(A \mid B) + P(\overline{B})P(A \mid \overline{B}).$$

• **Công thức Bayes**

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(B)P(A \mid B) + P(\overline{B})P(A \mid \overline{B})}.$$

• Nếu hai biến cố A và B độc lập thì $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B}) = P(A)$.

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Trong các câu từ câu 1 đến câu 20, chọn một phương án trả lời đúng.

A. Xác suất cổ điển

Câu 1. Một hộp chứa 6 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn An lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi từ hộp. Xác suất để 3 viên bi được lấy ra có cùng màu là

A. $\frac{5}{7}$. B. $\frac{5}{28}$. C. $\frac{5}{56}$. D. $\frac{5}{14}$.

Câu 2. Bạn Minh gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Xác suất của biến cố "Tổng số chấm xuất hiện là số chẵn" là

A. 0,25. B. 0,5. C. 0,75. D. 1.

Câu 3. Một hộp chứa 6 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 6. Bạn Cúc lấy ra đồng thời 2 tấm thẻ từ hộp. Xác suất của biến cố "Tích các số trên 2 tấm thẻ bằng 6" là

A. $\frac{1}{15}$. B. $\frac{2}{15}$. C. $\frac{4}{15}$. D. $\frac{1}{30}$.

Câu 4. Một hộp chứa 10 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 10. Bạn Dương lấy ra lần lượt 2 tấm thẻ từ hộp. Thẻ lấy ra lần thứ nhất không được trả lại hộp. Xác suất của biến cố "Tổng các số trên 2 tấm thẻ bằng 12" là

A. $\frac{1}{10}$. B. $\frac{1}{12}$. C. $\frac{4}{45}$. D. $\frac{2}{15}$.

Câu 5. Cho hai biến cố xung khắc A và B có $P(A) = 2P(B) = 0{,}2$. Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

A. 0,3. B. 0,4. C. 0,02. D. 0,28.

Câu 6. Cho hai biến cố độc lập A và B có $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,4$. Xác suất của biến cố $A\overline{B}$ là

A. 0,1. B. 0,2. C. 0,3. D. 0,4.

Câu 7. Cô Hoa và cô Lan đi thi lấy bằng lái xe. Xác suất thi đạt của cô Hoa và cô Lan lần lượt là 0,6 và 0,3. Biết rằng mỗi người thực hiện phần thi độc lập với nhau, xác suất để cả hai người cùng thi đạt là

A. 0,18. B. 0,6. C. 0,9. D. 0,72.

Câu 8. Bốn bạn Ân, Bắc, Châu, Duy xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang để chụp ảnh. Xác suất để hai bạn Ân và Châu đứng cạnh nhau là

A. 0,25. B. 0,33. C. 0,5. D. 0,66.

Câu 9. Lớp 12A có 40 học sinh, trong đó có 17 học sinh giỏi Địa lí, 11 học sinh giỏi Lịch sử và 8 học sinh giỏi cả hai môn. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của lớp 12A. Xác suất để học sinh được chọn học giỏi ít nhất một trong hai môn Lịch sử hoặc Địa lí là

A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{7}{10}$. C. $\frac{1}{15}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 10. Câu lạc bộ cờ vua của trường Lê Lợi có 4 học sinh lớp 10; 6 học sinh lớp 11 và 5 học sinh lớp 12. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ câu lạc bộ. Xác suất để có ít nhất 2 học sinh khối 10 trong 3 học sinh được chọn là

A. $\frac{1}{13}$. B. $\frac{2}{13}$. C. $\frac{3}{13}$. D. $\frac{4}{13}$.

B. Xác suất có điều kiện

Câu 11. Cho hai biến cố ngẫu nhiên A và B có $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,7$; $P(AB) = 0,3$. Xác suất của $\overline{B}$ với điều kiện A là

A. 0,6. B. 0,3. C. 0,4. D. $\frac{3}{7}$.

Câu 12. Cho hai biến cố ngẫu nhiên A và B có $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,5$; $P(AB) = 0,4$. Xác suất của $\overline{A}$ với điều kiện $\overline{B}$ là

A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{2}{7}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{4}{7}$.

Câu 13. Cho hai biến cố ngẫu nhiên A và B có $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,6$; $P(A|B) = 0,5$. Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

A. 0,9. B. 0,18. C. 0,3. D. 0,6.

Câu 14. Cho hai biến cố ngẫu nhiên A và B có $P(A \mid B) = 4P(B \mid A)$. Tỉ số $\frac{P(A)}{P(B)}$ là

A. $\frac{1}{4}$. B. 4. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{8}$.

Câu 15. Cho hai biến cố ngẫu nhiên A và B có $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,6$; $P(A \cup B) = 0,7$. Xác suất của A với điều kiện B là

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 3

Câu 16. Một hộp chứa 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 1 viên bi vàng. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Hà lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp. Xác suất viên bi lấy ra không có màu vàng, biết rằng nó không có màu đỏ là

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{5}{8}$. C. $\frac{7}{8}$. D. $\frac{4}{5}$.

Câu 17. Bạn Xuân có hai hộp bi. Hộp thứ nhất có 5 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 4 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Xuân chọn ngẫu nhiên một hộp đựng bi và từ đó lấy ra ngẫu nhiên 2 viên bi. Xác suất 2 viên bi lấy ra đều có màu đỏ, biết rằng bạn Xuân chọn hộp thứ hai là

A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{9}$.

Câu 18. Một hộp chứa 4 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Thái lấy ra ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp. Xác suất 2 viên bi lấy ra đều có màu vàng, biết rằng chúng có cùng màu là

A. $\frac{6}{7}$. B. $\frac{1}{21}$. C. $\frac{1}{7}$. D. $\frac{20}{21}$.

Câu 19. Bạn Đông có hai hộp đựng bi. Hộp thứ nhất có 3 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 4 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Đông chọn ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai, rồi chọn ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai. Xác suất 2 viên bi được chọn ra đều có màu xanh là

A. $\frac{3}{16}$. B. $\frac{2}{15}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{3}{8}$.

Câu 20. Một doanh nghiệp có 45% nhân viên là nữ. Tỉ lệ nhân viên nữ có bằng đại học là 30% và tỉ lệ nhân viên nam có bằng đại học là 25%. Chọn ngẫu nhiên 1 nhân viên của doanh nghiệp đó. Xác suất nhân viên này có bằng đại học là

A. $\frac{111}{400}$. B. $\frac{11}{80}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{109}{400}$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Trong các câu từ câu 1 đến câu 10, chọn đúng hoặc sai cho mỗi ý a), b), c), d).

A. Xác suất cổ điển

Câu 1. Một hộp chứa 5 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp. Gọi A là biến cố "Có ít nhất 1 viên bi đỏ trong 2 bi được chọn" và B là biến cố "Có ít nhất 1 viên bi xanh trong 2 viên bi được chọn".

a) Không gian mẫu của phép thử có số phần tử là 10.

b) A và B là hai biến cố đồng khả năng.

c) Xác suất của biến cố A là 0,5.

d) A và B là hai biến cố độc lập.

Câu 2. Cho hai biến cố A và B có $P(\overline{A}B) = 0,2; P(AB) = P(A\overline{B}) = 0,3$.

a) Xác suất của biến cố A là 0,5.

b) Xác suất của biến cố B là 0,5.

c) A và B là hai biến cố độc lập.

d) Xác suất của biến cố $\overline{A}\overline{B}$ là 0,25.

Câu 3. Một đội văn nghệ gồm 4 bạn nam và 6 bạn nữ. Chọn ra ngẫu nhiên 5 bạn để biểu diễn một tiết mục.

a) Không gian mẫu của phép thử có số phần tử là 252.

b) Xác suất của biến cố "Có đúng 1 bạn nam trong 5 bạn được chọn" là $\frac{5}{21}$.

c) Xác suất của biến cố "Có ít nhất 1 bạn nam trong 5 bạn được chọn" là $\frac{1}{42}$.

d) Gọi A_k là biến cố có đúng k bạn nam trong 5 bạn được chọn với $0 \leq k \leq 4$. Xác suất $P(A_k)$ đạt giá trị lớn nhất khi $k = 2$.

Câu 4. Một hộp chứa 10 tấm thẻ màu trắng được đánh số lần lượt từ 1 đến 10 và 4 tấm thẻ màu đen được đánh số lần lượt từ 1 đến 4. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 tấm thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố "Hai thẻ lấy ra có cùng màu" và B là "Hai thẻ lấy ra cùng ghi số lẻ".

a) Không gian mẫu của phép thử có số phần tử là 91.

b) Xác suất của biến cố A là $\frac{45}{91}$.

c) Xác suất của biến cố B là $\frac{3}{13}$.

d) A và B là hai biến cố độc lập.

Câu 5. Bạn Lan có 6 viên bi khác nhau và 3 chiếc hộp được đánh số 1; 2; 3. Biết rằng mỗi chiếc hộp đều có thể chứa từ 0 đến 6 viên bi. Lan lần lượt cho từng viên bi vào 3 chiếc hộp một cách ngẫu nhiên.

a) Không gian mẫu của phép thử có số phần tử là 20.

b) Số cách xếp bi sao cho hộp số 1 không chứa viên bi nào là 64.

c) Số cách xếp bi sao cho chỉ có hộp số 1 không chứa viên bi nào là 32.

d) Xác suất để không có hộp nào bị trống là $\frac{179}{243}$.

B. Xác suất có điều kiện

Câu 6. Cho hai biến cố A và B có $P(B) = 0,5$; $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B}) = 0,4$.

a) Xác suất của biến cố AB là 0,02.

b) Xác suất của biến cố $A\overline{B}$ là 0,2.

c) Xác suất của biến cố A là 0,8.

d) A và B là hai biến cố độc lập.

Câu 7. Một phân xưởng có 80% công nhân là nữ. Tỉ lệ công nhân nữ có tay nghề cao là 40%, tỉ lệ công nhân nam có tay nghề cao là 55%. Chọn ngẫu nhiên 1 công nhân của phân xưởng. Gọi A là biến cố "Công nhân được chọn là nữ" và B là biến cố "Công nhân được chọn có tay nghề cao".

a) Xác suất của biến cố $\overline{A}$ là 0,8.

b) Xác suất của biến cố B là 0,43.

c) A và B là hai biến cố độc lập.

d) Xác suất của biến cố A với điều kiện B là $\frac{11}{43}$.

Câu 8. Bạn Ninh có 4 tấm thẻ được đánh số lần lượt là 3; 6; 8; 9. Ninh lấy ra 2 tấm thẻ trong 4 tấm thẻ đó và xếp chúng thành một hàng ngang một cách ngẫu nhiên để tạo thành một số có hai chữ số. Gọi A là biến cố "Số tạo thành chia hết cho 2" và B là biến cố "Số tạo thành chia hết cho 3".

a) Xác suất của biến cố A là 0,5.

b) Xác suất của biến cố AB là 0,25.

c) Xác suất của biến cố A với điều kiện B là $\frac{1}{3}$.

d) Xác suất của biến cố A với điều kiện $\overline{B}$ là $\frac{2}{3}$.

Câu 9. Một đội văn nghệ gồm 3 bạn nam và 7 bạn nữ. Chọn ra ngẫu nhiên 3 bạn để biểu diễn một tiết mục. Gọi A là biến cố "Có ít nhất một bạn nam trong 3 bạn được chọn", B là biến cố "Ba bạn được chọn có cùng giới tính".

a) Xác suất của biến cố B là 0,333.

b) Xác suất của biến cố AB là $\frac{1}{120}$.

c) Xác suất của biến cố A với điều kiện B là 0,024.

d) Xác suất của biến cố A với điều kiện $\overline{B}$ là $\frac{17}{42}$.

Câu 10. Kết quả khảo sát những bệnh nhân bị đột quỵ của một bệnh viện cho thấy tỉ lệ bệnh nhân hồi phục sau đột quỵ là 35%; tỉ lệ bệnh nhân được điều trị trong 6 giờ đầu sau khi đột quỵ là 40%; tỉ lệ bệnh nhân được điều trị trong 6 giờ đầu sau khi đột quỵ và hồi phục là 30%. Chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân bị đột quỵ được điều trị tại bệnh viện.

a) Xác suất người đó được điều trị trong 6 giờ đầu sau khi đột quỵ, biết rằng người đó hồi phục là 0,6.

b) Xác suất người đó không hồi phục, biết rằng người đó được điều trị trong 6 giờ đầu sau khi đột quỵ là 0,4.

c) Xác suất người đó hồi phục, biết rằng người đó không được điều trị trong 6 giờ đầu sau khi đột quỵ là $\frac{1}{25}$.

d) Việc đưa bệnh nhân vào bệnh viện để điều trị trong 6 giờ đầu sau khi đột quỵ làm tăng tỉ lệ hồi phục lên $\frac{10}{3}$ lần.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

A. Xác suất cổ điển

Câu 1. Cho 5 đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 3 cm, 4 cm, 5 cm, 12 cm, 13 cm. Chọn ngẫu nhiên 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng đó. Tính xác suất để 3 đoạn thẳng được chọn là ba cạnh của một tam giác vuông.

Câu 2. Một buổi liên hoan có 10 nam và 10 nữ tham gia, trong đó có 8 cặp vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên một đôi nam nữ để biểu diễn một tiết mục song ca. Tính xác suất để đôi nam nữ được chọn không phải là một cặp vợ chồng.

Câu 3. Chọn ngẫu nhiên 2 ô vuông bất kì trong 64 ô vuông của bàn cờ vua. Tính xác suất để 2 ô vuông được chọn không cùng nằm trên một hàng ngang hay cột dọc nào của bàn cờ.

Câu 4. Chọn ngẫu nhiên 3 cạnh bất kì từ các cạnh của một đa giác đều 12 cạnh $A_1A_2...A_{12}$. Tính xác suất để 2 cạnh bất kì trong 3 cạnh được chọn không có điểm chung.

Câu 5. Một hộp chứa 10 quả bóng có cùng kích thước và khối lượng, trong đó có k quả bóng màu xanh. Bạn Duy chọn ra ngẫu nhiên đồng thời 3 quả bóng từ hộp. Tìm k để xác suất của biến cố "Có đúng 2 quả bóng xanh trong 3 quả bóng được chọn" đạt giá trị lớn nhất.

B. Xác suất có điều kiện

Câu 6. Một khu dân cư có 60% các hộ gia đình có không quá 4 thành viên. Trong các gia đình có không quá 4 thành viên, có 20% gia đình có ba thế hệ cùng chung sống; trong các gia đình có trên 4 thành viên, có 70% gia đình có ba thế hệ cùng chung sống. Chọn ngẫu nhiên 1 hộ gia đình trong khu dân cư. Biết rằng gia đình đó có ba thế hệ cùng chung sống, tính xác suất để gia đình đó có trên 4 thành viên.

Câu 7. Một phòng khám có 2 bác sĩ, 4 y tá và 1 hộ lí. Chọn ra ngẫu nhiên đồng thời 3 người từ phòng khám đó. Tính xác suất để cả 3 người đều là y tá, biết rằng trong đó không có bác sĩ nào.

Câu 8. Năm bạn A, B, C, D, E xếp thành một hàng ngang theo thứ tự ngẫu nhiên. Tính xác suất để A đứng cạnh C, biết rằng A không đứng cạnh E.

Câu 9. Một hộp chứa 10 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 10. Bạn Xuân lấy ra ngẫu nhiên 1 tấm thẻ từ hộp. Nếu tấm thẻ đó ghi số chẵn, bạn Thu sẽ lấy ra ngẫu nhiên tiếp 1 tấm thẻ từ hộp. Nếu tấm thẻ đó ghi số lẻ, bạn Thu sẽ lấy ra ngẫu nhiên tiếp 2 tấm thẻ từ hộp. Tính xác suất để bạn Thu lấy được thẻ ghi số 10.

Câu 10. Bạn Chi có 1 đồng xu và 1 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Chi gieo đồng xu. Nếu đồng xu xuất hiện mặt sấp, Chi gieo con xúc xắc 2 lần. Nếu đồng xu xuất hiện mặt ngửa, Chi gieo con xúc xắc 1 lần. Gọi X là tổng số chấm xuất hiện. Tìm k sao cho xác suất $X = k$ đạt giá trị lớn nhất.

PHẦN HAI. ĐỀ ÔN TẬP

ĐỀ SỐ 1

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; 1)$. B. $(3; +\infty)$. C. $(-1; 3)$. D. $(-3; +\infty)$.

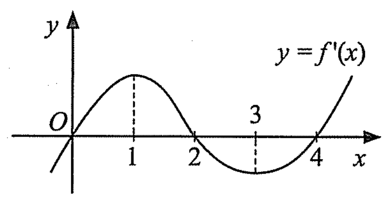
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như Hình 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(2; 4)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.

D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 4$.



Hình 1

Câu 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. 1. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. 5.

Câu 4. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$ là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 5. Cho hàm số $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập K và $a, b \in K$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. B. $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$.

C. $\int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a)$. D. $\int_a^b f(x)dx = F(b).F(a)$.

Câu 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ là

A. $2x^2 + \ln|x| + C$.

B. $x^2 + \ln|x| + C$.

C. $2x^2 - \ln|x| + C$.

D. $x^2 - \ln|x| + C$.

Câu 7. Một hộp chứa 10 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 10. Chọn ra ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ từ hộp. Xác suất để chọn được tấm thẻ ghi số 10, biết rằng tổng các số ghi trên 2 tấm thẻ đó lớn hơn 17 là

A. $\frac{5}{6}$.

B. 1.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Câu 8. Chiều cao của các bạn học sinh nữ lớp 12B được ghi lại ở bảng sau:

Chiều cao (cm)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số học sinh	2	5	8	5

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Câu 9. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *M* là trung điểm của đoạn thẳng *AB* (Hình 2).

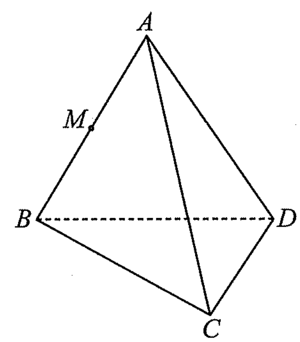
Khi đó vectơ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ bằng

A. $\overrightarrow{AB}$.

B. $\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{BA}$.

D. $2\overrightarrow{MA}$.



Hình 2

Câu 10. Trong không gian *Oxyz*, cho mặt phẳng (P): $x - 3y - 4z + 1 = 0$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có toạ độ là

A. $(1; -3; 4)$.

B. $(1; 3; 4)$.

C. $(-1; -3; 4)$.

D. $(1; -3; -4)$.

Câu 11. Trong không gian *Oxyz*, cho mặt cầu (S) có tâm $I\ (1; 2; -1)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của (S) là

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$.

D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 2$.

Câu 12. Trong không gian *Oxyz*, cho điểm $A\ (1; 2; -1)$ và mặt phẳng (P): $x + 2y + z = 0$. Mặt phẳng (Q) qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $x + 2y + z - 1 = 0$.

B. $x + 2y + z + 4 = 0$.

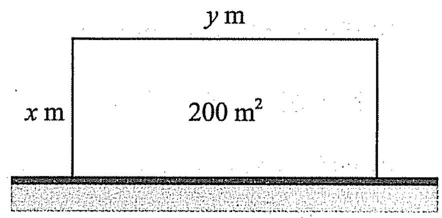
C. $x + 2y + z - 6 = 0$.

D. $x + 2y + z - 4 = 0$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Thí sinh trả lời từ câu 13 đến câu 16. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13. Cần rào ba cạnh để cùng với bờ tường có sẵn tạo thành mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 200 m^2 (Hình 3). Kí hiệu x (m), y (m) lần lượt là độ dài các cạnh của mảnh vườn vuông góc và song song với bờ tường; L (m) là tổng độ dài lưới thép cần để rào mảnh vườn. Biết rằng mỗi mét lưới thép dùng để rào mảnh vườn có đơn giá 250 nghìn đồng.



Hình 3

a) y được tính theo x bằng công thức $y = \dfrac{200}{x}$.

b) L được tính theo x theo công thức $L = 2x + \dfrac{100}{x}$.

c) L đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 10$ (m).

d) Số tiền tối thiểu để mua lưới thép rào mảnh vườn là 2,5 triệu đồng.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = e^x - 2x$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

a) $F'(2) = e^2 - 4$.

b) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = e^x + x^2 + C$.

c) $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = e^2 - 4$.

d) Diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ bằng $e^2 - 5$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 2; 3)$, $B(3; -4; 1)$ và $C(2; -5; 1)$.

a) Toạ độ của hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxy) là $(-1; 2; 0)$.

b) $\overrightarrow{AB} = (2; -3; -1)$.

c) Đường thẳng BC song song với mặt phẳng (Oxy).

d) Gọi M là điểm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng. Khi đó $CM = \sqrt{15}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;\ 1;\ 7)$, $B(5;\ 5;\ 1)$ và mặt phẳng (P): $2x - y - z = 0$.

a) Mặt phẳng trung trực (Q) của đoạn thẳng AB có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 2; -3)$.

b) Phương trình đường thẳng giao tuyến d của hai mặt phẳng (P) và (Q) là $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.

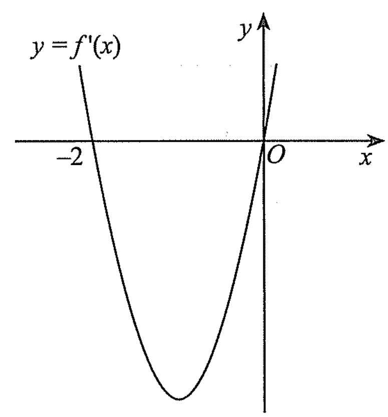
c) Nếu điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA = MB$ thì $M \in d$.

d) Điểm $C(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $CA = CB = \sqrt{35}$. Nếu a là số nguyên thì $OC = 2\sqrt{2}$.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Thí sinh trả lời từ câu 17 đến câu 22.

Câu 17. Đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $f(x)$ là một hàm số bậc hai và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như Hình 4. Biết rằng hàm số $f(x)$ có giá trị cực đại là 2 và giá trị cực tiểu là -2. Tìm giá trị của $f(2)$.

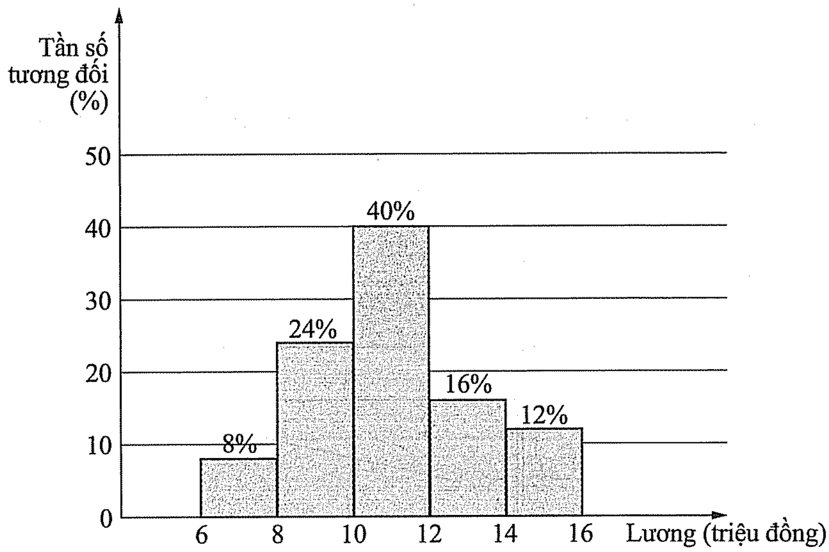


Hình 4

Câu 18. Một thùng dầu bị rò rỉ từ lúc 13 giờ với tốc độ rò rỉ là $v(t) = 16 + 3t$ (lít/giờ), trong đó t (giờ) là thời gian tính từ khi bắt đầu bị rò rỉ. Khi đó $V(t)$ (lít) là thể tích dầu bị mất đi thoả mãn $V'(t) = v(t)$. Giả sử V_1 là thể tích dầu bị mất đi trong khoảng thời gian từ 13 giờ đến 16 giờ và V_2 là thể tích dầu bị mất đi trong khoảng thời gian từ 16 giờ đến 19 giờ. Tính $V_2 - V_1$ (theo đơn vị lít).

Câu 19. Xác suất bắn trúng đích của xạ thủ hạng I là 0,8 và của xạ thủ hạng II là 0,7. Chọn ngẫu nhiên 1 xạ thủ từ một nhóm gồm 4 xạ thủ hạng I và 6 xạ thủ hạng II. Biết rằng xạ thủ này bắn 2 viên đạn một cách độc lập và chỉ có một viên trúng đích, tính xác suất để đó là xạ thủ hạng I (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 20. Lương tháng của 50 nhân viên một công ty được biểu diễn ở biểu đồ sau:



Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (đơn vị: triệu đồng). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; -5)$, $B(-4; 2; 1)$. Xét M là điểm thay đổi thoả mãn điều kiện $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right| = 9$. Độ dài đoạn thẳng OM lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A(0; 0; 0)$, $B(6; 0; 0)$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng $D(0; x; 0)$ với $x > 0$ thoả mãn $AD = 2AB = 2BC$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).

ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng

A. -2. B. 0. C. 2. D. 4.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - mx - 1$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 4)$?

A. 23. B. 8. C. 9. D. Vô số

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\,dx = x^3 - \cos x + C$. B. $\int f(x)\,dx = x^3 + \cos x + C$.

C. $\int f(x)\,dx = 6x - \cos x + C$. D. $\int f(x)\,dx = 6x + \cos x + C$.

Câu 6. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 3$. Diện tích của hình phẳng (H) được tính bằng công thức nào dưới đây?

A. $S = \int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx$.

B. $S = \int_0^3 (-x^2 + 2x)dx$.

C. $S = \int_2^3 |x^2 - 2x|\,dx$.

D. $S = \int_0^3 |x^2 - 2x|\,dx$.

Câu 7. Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,5$ và $P(A \cup B) = 0,8$. Xác suất của biến cố A với điều kiện B là

A. 0,4. B. 0,5. C. 0,7. D. 0,8.

Câu 8. Khối lượng của một số quả trứng gà trong một trang trại được ghi lại ở bảng sau.

Khối lượng (gam)	[43; 45)	[45; 47)	[47; 49)	[49; 51)
Số quả trứng	12	34	32	1

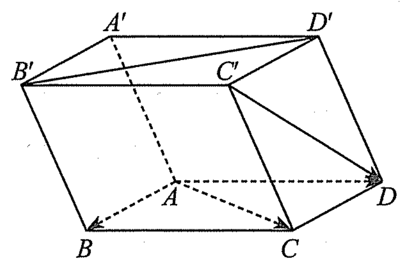
Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên thuộc nửa khoảng nào dưới đây?

A. [1,4; 1,6). B. [2,0; 2,2). C. [3,3; 3,5). D. [3,5; 3,7).

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào dưới đây cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$?

A. $\overrightarrow{C'D}$. B. $\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{B'D'}$.



Hình 1

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 8z - 1 = 0$ có toạ độ tâm là

A. $(4; -2; 8)$. B. $(2; -1; 4)$. C. $(-2; 1; -4)$. D. $(2; -1; -4)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 1)$ là

A. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+1}{1}$.

B. $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-1}{1}$.

C. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{1}$.

D. $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{1}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;\ 0;\ 2)$ và vuông góc với đường thẳng $d: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$ có phương trình là

A. $2x + y - 3z - 8 = 0$.

B. $2x - y + 3z - 8 = 0$.

C. $2x + y - 3z + 8 = 0$.

D. $2x - y + 3z + 8 = 0$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Thí sinh trả lời từ câu 13 đến câu 16. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x) = -x + 1 - \dfrac{1}{x-1}$.

a) Đường thẳng $y = x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

b) Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ là $f'(x) = \dfrac{2x - x^2}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$.

c) Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là -2.

d) Bất phương trình $x^2 + (m-2)x - m + 2 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x > 1$ nếu $m \geq -2$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ 3x^2 - 2 & \text{khi } x > 1. \end{cases}$

a) $F(x) = \begin{cases} x^2 - x + C_1 & \text{khi } x \leq 1 \\ x^3 - 2x + C_2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -2$.

c) $\displaystyle\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 20$.

d) $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 22$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;\ -3;\ 2)$, $B(2;\ 4;\ -2)$ và $C'(3;\ 2;\ -2)$.

a) Trung điểm của đoạn thẳng OB là $C(1;\ 2;\ -1)$.

b) Biết rằng tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành. Cao độ của điểm A' là $z = 1$.

c) Biết rằng điểm B' là đỉnh còn lại của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Khi đó tung độ của điểm B' là $y = -3$.

d) Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\dfrac{7}{2}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y+6)^2+z^2=50$ có tâm I và điểm $K(1; -3; 0)$.

a) Mặt cầu (S) có bán kính $R=5\sqrt{2}$.

b) Điểm K thuộc mặt cầu (S).

c) Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến điểm K bằng 10.

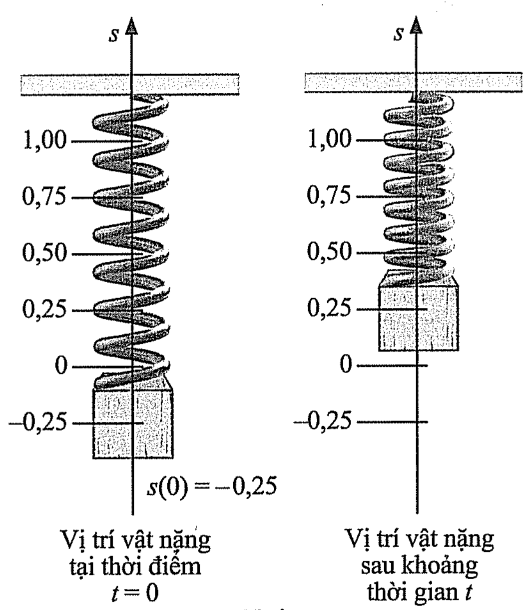
d) Xét các điểm M thuộc (S) sao cho $\widehat{KMI}$ lớn nhất. Khi đó, giá trị của MK bằng $2\sqrt{10}$.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Thí sinh trả lời từ câu 17 đến câu 22.

Câu 17. Sau khi tiêm một loại thuốc vào cơ thể bệnh nhân, nồng độ thuốc trong máu (tính theo mg/cm^3) thay đổi theo công thức $C(t)=\dfrac{0,15t}{t^2+1}$, trong đó t là thời gian (tính theo giờ) kể từ thời điểm tiêm thuốc, $t \geq 0$. Nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mg/cm^3 (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)?

Câu 18. Một vật nặng được treo vào đầu của một con lắc lò xo đang ở điểm gốc ($s=0$), con lắc lò xo có khối lượng không đáng kể. Giả sử rằng chiều dương là chiều hướng từ dưới lên. Tại thời điểm $t=0$, vật nặng được kéo xuống 0,25 m đến vị trí ban đầu $s(0)=-0,25$ và được thả ra (Hình 2).



Hình 2

Vận tốc của vật (tính bằng m/s) được cho bởi công thức $v(t)=\dfrac{1}{4}\sin t$, với $t \geq 0$. Tìm thời điểm lần đầu tiên vật đạt đến vị trí cao nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của giây).

Câu 19. Bác Hải đo chiều cao của 50 cây giống được lựa chọn ngẫu nhiên. Kết quả được ghi lại trong bảng số liệu ghép nhóm dưới đây.

Chiều cao (cm)	[15; 16)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)	[19; 20)
Tần số tương đối	12%	24%	36%	20%	8%

Tính tỉ số của độ lệch chuẩn và số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 20. Trong một nhóm người cao tuổi có 60% là nam giới. Kết quả kiểm tra sức khoẻ cho thấy trong nhóm đó, tỉ lệ nam giới bị cao huyết áp gấp 1,2 lần tỉ lệ nữ giới bị cao huyết áp. Chọn ngẫu nhiên một người trong nhóm và thấy rằng người này bị cao huyết áp. Tính xác suất người đó là nam giới (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; -2; -1)$, $B(-3; -1; 2)$, $C(3; 2; 1)$ và $D(-2; 1; 3)$. Gọi M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxz). Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = MA^2 - 2MB^2 - MC^2 + MD$ bằng bao nhiêu?

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$ và hai mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 5 = 0$, $(Q): 2x - y + z - 5 = 0$. Hai đường thẳng d và Δ đi qua tâm của (S), lần lượt vuông góc và cắt (P), (Q) theo thứ tự đó tại A và B. Tính độ dài đoạn thẳng AB (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

ĐỀ SỐ 3

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

A. 3. B. –2. C. –1. D. 2.

Câu 2. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x+2}$ có phương trình là

A. $x=2$. B. $x=\dfrac{1}{3}$. C. $x=3$. D. $x=-2$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x}+\ln x\ (x>0)$.

A. $x=2$ là điểm cực tiểu của hàm số. B. $x=-2$ là điểm cực đại của hàm số.

C. $x=\dfrac{1}{2}$ là điểm cực tiểu của hàm số. D. $x=-\dfrac{1}{2}$ là điểm cực đại của hàm số.

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+3x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 0. B. 3. C. 6. D. 7.

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=5^{2x}$ là

A. $\int 5^{2x}\,dx=\dfrac{5^{2x}}{\ln 5}+C$. B. $\int 5^{2x}\,dx=\dfrac{5^{2x}}{2\ln 5}+C$.

C. $\int 5^{2x}\,dx=2.5^{2x}.\ln 5+C$. D. $\int 5^{2x}\,dx=5^{2x}.\ln 5+C$.

Câu 6. Tích phân $\int_0^{\pi} 2\sin x\,dx$ bằng

A. 4. B. −4. C. 2. D. −2.

Câu 7. Minh gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất 2 lần liên tiếp. Xác suất để tích số chấm trên hai mặt xuất hiện chia hết cho 5 biết rằng tích đó là số lẻ là

A. $\frac{5}{9}$. B. $\frac{4}{9}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{5}{36}$.

Câu 8. Thời gian thực hiện xong một thí nghiệm hoá học của học sinh lớp 12H được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
Số học sinh	12	25	0	0	1

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là

A. 5. B. 4. C. 2. D. 1

Câu 9. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm của *BC*, *CD*. Gọi *G* là trọng tâm của tam giác *BCD*.

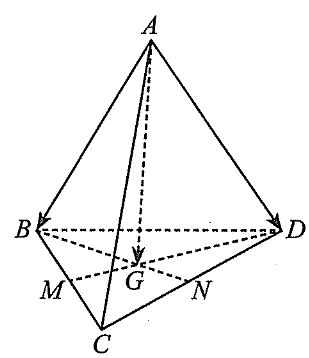
Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

B. $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

D. $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.



Hình 1

Câu 10. Trong không gian *Oxyz*, phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$. B. $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+3=0$.

C. $x^2+y^2-z^2-2x-2y-2z-1=0$. D. $x^2+y^2+2z^2-2x-2y-2z-1=0$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=-1+2t\\z=2-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Đường thẳng đi qua điểm $M(0;\ 1;\ -1)$ và song song với đường thẳng d có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

B. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$.

C. $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

D. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua các điểm $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ -3;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 5)$ có phương trình là

A. $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{-3}+\dfrac{z}{2}=1$.

B. $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{5}=1$.

C. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-3}+\dfrac{z}{5}=0$.

D. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-3}+\dfrac{z}{5}=1$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Thí sinh trả lời từ câu 13 đến câu 16. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+2}$.

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.

b) Hàm số $f(x)$ có $x=2$ là điểm cực tiểu.

c) Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta luôn có $-1\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$.

d) Nếu $-1<m\le 0$ thì phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm.

Câu 14. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số (C): $y=f(x)=6\sqrt{x}-5$, đường thẳng $y=1$ và hai đường thẳng $x=1$, $x=4$.

a) $\int f(x)\,dx=4x\sqrt{x}-5x+C$.

b) $\int[f(x)-1]\,dx=4x\sqrt{x}-6x+C$.

c) $\int_1^4[f(x)-1]\,dx=6$.

d) Diện tích của hình phẳng (H) bằng 10.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(-2; 1; 1)$ và $C(-3; 3; -2)$.

a) Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $(3; 1; 2)$.

b) Độ dài của đoạn thẳng AC bằng $\sqrt{42}$.

c) Góc $\widehat{BAC}$ là góc tù.

d) Xét các điểm M trên mặt phẳng (Ozx) thoả mãn điều kiện $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Khi đó, giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng OM lớn hơn hoặc bằng 3.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(0; 21; -19)$ và mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

a) Tâm I của mặt cầu (S) có toạ độ là $(-1; -1; -1)$.

b) Toạ độ của điểm D sao cho $3\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ là $(1; 4; -3)$.

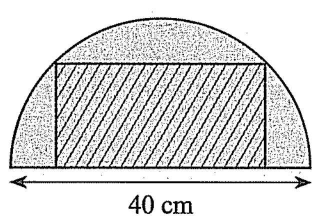
c) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm I và D có một vectơ chỉ phương là $(0; 3; -4)$.

d) Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T = 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, giá trị của T bằng 672.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Thí sinh trả lời từ câu 17 đến câu 22.

Câu 17. Từ một tấm thép hình bán nguyệt có đường kính 40 cm, người ra muốn cắt ra một tấm thép hình chữ nhật (có một cạnh nằm trên đường kính của hình bán nguyệt như Hình 2) có diện tích lớn nhất có thể. Tìm giá trị của diện tích lớn nhất đó.



Hình 2

Câu 18. Vận tốc (dặm/giờ) của một máy bay khi bay ngược chiều gió được cho bởi công thức $v(t) = 30(16 - t^2)$ với $0 \le t \le 3$. Khi vận tốc tức thời đạt 400 dặm/giờ thì máy bay đã đi được quãng đường bao xa kể từ thời điểm bay ngược chiều gió (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của dặm)?

Câu 19. Bác Tuấn kiểm tra cân nặng của 40 quả trứng được lựa chọn ngẫu nhiên từ một trang trại và ghi kết quả vào bảng dữ liệu ghép nhóm sau:

Cân nặng (gam)	[75; 80)	[80; 85)	[85; 90)	[90; 95)	[95; 100)
Tần số tương đối	25%	35%	25%	10%	5%

Tính tỉ số của khoảng tứ phân vị và khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Câu 20. Một hộp chứa 10 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Bạn Phú lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp, xem màu, rồi bỏ ra ngoài. Nếu viên bi Phú lấy ra có màu xanh, bạn Thọ sẽ lấy ra ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp; còn nếu viên bi Phú lấy ra có màu đỏ, bạn Thọ sẽ lấy ra ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp. Tính xác suất để Phú lấy được viên bi màu xanh, biết rằng tất cả các viên bi được hai bạn chọn ra đều có đủ cả hai màu.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 1; 2)$, $B(3; 2; 2)$, $C(-1; 6; 0)$. Xét $M(a; b; 0)$ trên mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S = 2MA + \left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

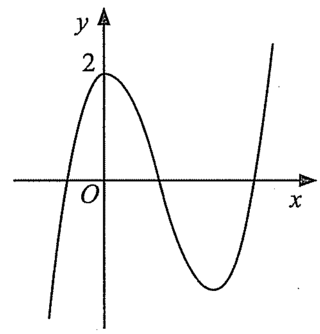
Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(a; 0; 0)$, $B(-a; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $B'(-a; 0; b)$, trong đó a, b là các số thực dương và thoả mãn $a + b = 4$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa $B'C$ và song song với AC' sao cho khoảng cách từ A đến (α) là lớn nhất. Khi đó, mặt cầu đi qua sáu điểm A, B, C, A', B', C' có bán kính R bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

ĐỀ SỐ 4

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số nào sau đây có đồ thị dạng như đường cong trong Hình 1?



Hình 1

A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

B. $y = x^3 + 3x^2 + 2$.

C. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+3)$ với $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$f(x)$	1	↗	3	↘	$-\infty$ || -3	↗	1

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 4. Biết rằng hàm số $f(x) = x^2e^x + a$ (a là hằng số) có giá trị cực tiểu bằng 1. Giá trị cực đại của hàm số này là

A. $\dfrac{4}{e^2}$. B. $\dfrac{1}{e}+1$. C. $\dfrac{4}{e^2}+1$. D. $1-\dfrac{4}{e^2}$.

Câu 5. Tích phân $\int_0^1 (e^x - 4x^3)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $e-2$. B. $e-1$. C. $e-4$. D. $e-3$.

Câu 6. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 3, x = 4$. Thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là

A. $V = \int_3^4 |x-2|\,\mathrm{d}x$.

B. $V = \int_3^4 (x^2 - 4x + 4)\,\mathrm{d}x$.

C. $V = \pi\int_3^4 |x-2|\,\mathrm{d}x$.

D. $V = \pi\int_3^4 (x^2 - 4x + 4)\,\mathrm{d}x$.

Câu 7. Một công ty có 60% nhân viên là nữ. Tỉ lệ nhân viên nữ đã kết hôn là 80%. Chọn ngẫu nhiên 1 nhân viên của công ty. Xác suất nhân viên đó là nữ và chưa kết hôn là

A. 0,6. B. 0,75. C. 0,12. D. 0.8.

Câu 8. Bảng dưới đây thống kê lượng điện tiêu thụ trong một tháng của một số hộ gia đình.

Số kWh	[200; 250)	[250; 300)	[300; 350)	[350; 400)
Số gia đình	10	16	8	6

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 50. B. 75. C. 100. D. 125.

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình 2).

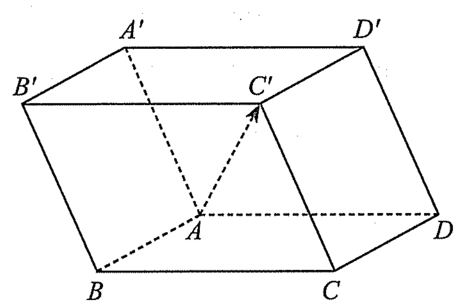
Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AA'}$.

B. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

C. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB'}$.

D. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$.



Hình 2

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1; 1; 0)$ và $B(3; 2; -1)$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = t. \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 1 + t \\ z = -t. \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t. \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 1 + t \\ z = t. \end{cases}$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng có phương trình $2x + y - 4z + 19 = 0$. Một điểm thuộc mặt phẳng đã cho có toạ độ là

A. $(2; 1; 6)$. B. $(2; 1; -6)$. C. $(2; 1; -4)$. D. $(-2; -1; 8)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $A(1; 1; 0)$ đến mặt phẳng (α): $2x + 2y + z - 1 = 0$ bằng

A. 1. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Thí sinh trả lời từ câu 13 đến câu 16. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13. Tại thời điểm t giờ kể từ khi tiêm một liều thuốc cho bệnh nhân, nồng độ thuốc trong máu được tính bởi công thức $C(t) = 0{,}5te^{-0{,}5t}$ mg/ml, $t \geq 0$.

a) Ban đầu (tại thời điểm tiêm) nồng độ thuốc có trong máu bệnh nhân là 0,5 mg/ml.

b) Kể từ thời điểm $t = 2$ (giờ), nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân giảm dần.

c) Nồng độ thuốc trong máu có thể vượt quá 0,5 mg/ml.

d) Có thời điểm nồng độ thuốc trong máu bằng 0,3 mg/ml.

Câu 14. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = 2e^{-x}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$.

a) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2e^{-x} + C$.

b) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{e-2}{e}$.

c) Diện tích của hình phẳng (H) bằng $2 - \frac{2}{e}$.

d) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành bằng $2\pi - \frac{2}{e^2}$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; -2; 5)$, $B(2; 1; -3)$ và $C(-1; 2; 1)$.

a) Hình chiếu vuông góc của điểm A trên trục Oz là $A'(0; 0; 5)$.

b) Hình chiếu vuông góc của điểm B trên mặt phẳng (Oyz) là $B'(2; 0; -3)$.

c) Biết rằng E là điểm nằm trên trục Ox và F là nằm điểm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho C là trung điểm của đoạn thẳng EF. Khi đó $EF > 5$.

d) Gọi $I(a; b; c)$ là trực tâm của tam giác ABC. Khi đó $a + b + c = 2$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; -6)$ và mặt phẳng (P): $4x - y + 2z + 13 = 0$.

a) Mặt phẳng (P) đi qua điểm A.

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$

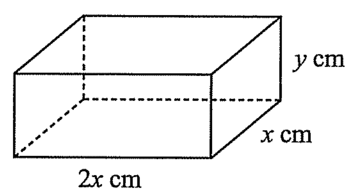
c) Điểm $C(-3; 3; 1)$ là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P).

d) Gọi d là một đường thẳng nằm trong (P) và d đi qua B sao cho khoảng cách từ A đến d đạt giá trị nhỏ nhất. Một vectơ chỉ phương của d có toạ độ là $(a; b; c)$ với a là số nguyên tố. Giá trị của $a + b + c$ bằng 6.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Thí sinh trả lời từ câu 17 đến câu 22.

Câu 17. Người ta muốn tạo ra một khung thép dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và có thể tích bằng $24\,000\ \text{cm}^3$ (Hình 3). Chiều rộng x của hình hộp chữ nhật bằng bao nhiêu để độ dài dây thép cần dùng là nhỏ nhất? Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của xăngtimét.



Hình 3

Câu 18. Một cái chậu cao 16 cm. Khi đổ nước vào chậu, nếu độ cao của nước là x (cm) $(0 \le x \le 16)$ thì mặt thoáng của nước là hình tròn bán kính $r = 9 + \sqrt{x}$ (cm). Tính dung tích của chậu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của lít).

Câu 19. Xác suất bắn trúng đích của xạ thủ hạng I là 0,8 và của xạ thủ hạng II là 0,7. Chọn ngẫu nhiên 1 xạ thủ từ một nhóm gồm 4 xạ thủ hạng I và 6 xạ thủ hạng II. Xạ thủ này bắn một viên đạn và viên đạn đó trúng mục tiêu, tính xác suất để đó là xạ thủ hạng I (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 20. Một hộp chứa 5 viên bi màu xanh được đánh số lần lượt từ 1 đến 5 và 6 viên bi màu trắng được đánh số lần lượt từ 1 đến 6. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn An lấy ra ngẫu nhiên đồng thời hai viên bi từ hộp. Biết rằng hai viên bi lấy ra cùng màu, tính xác suất của biến cố tích các số ghi trên hai viên bi chia hết cho 5.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; -2)$ và $B(-3; -3; 3)$. Xét điểm M thay đổi sao cho $3MA - 2MB = 0$. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng OM (kết quả làm tròn đến hàng phần chục) bằng bao nhiêu?

Câu 22. Cho khối chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 3 cm, diện tích hai đáy lần lượt là 72 cm^2 và 18 cm^2. Số đo góc (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) giữa hai mặt bên của khối chóp cụt đều đã cho là a^o. Tính giá trị của a.

ĐỀ SỐ 5

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chọn một phương án đúng.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là

A. –2. B. –1. C. 2. D. 1.

Câu 2. Cho hàm số $y = e^x(x-2)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; 2)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x - 3 + \dfrac{9}{x+2}$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng

A. 0. B. 1. C. $\dfrac{9}{5}$. D. 5.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -4)$?

A. 3. B. 4. C. 5. D. Vô số.

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + 2\cos x$ là

A. $\cos x - 2\sin x + C$. B. $-\cos x + 2\sin x + C$.

C. $\cos x + 2\sin x + C$. D. $-\cos x - 2\sin x + C$.

Câu 6. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^3 - x$, $y = 3x$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$. Diện tích của (H) được tính bằng công thức

A. $S = \int_1^3 (4x - x^3)\,dx$. B. $S = \int_1^3 (x^3 - 4x)\,dx$.

C. $S = \int_1^3 (x^3 - 4x)^2\,dx$. D. $S = \int_1^3 |x^3 - 4x|\,dx$.

Câu 7. Hộp thứ nhất có 4 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ; hộp thứ hai có 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi ở hộp thứ nhất, cho vào hộp thứ hai rồi lại lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai. Biết rằng 2 viên bi lấy ở hộp thứ nhất cùng màu, xác suất lấy được viên bi màu đỏ từ hộp thứ hai là

A. 0,4. B. 0,3. C. 0,6. D. 0,5.

Câu 8. Bảng sau ghi lại điểm tổng kết cuối năm môn Ngữ văn của các học sinh lớp 12D.

Điểm	[7; 7,5)	[7,5; 8)	[8; 8,5)	[8,5; 9)
Số học sinh	6	16	13	5

Phương sai của mẫu số liệu trên thuộc khoảng

A. [0; 0,2). B. [2,0; 2,2). C. [3,3; 3,5). D. [3,5; 3,7).

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD và G là trọng tâm tam giác BCD.

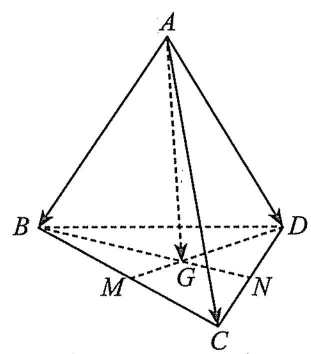
Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AG}$.

D. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AN}$.



Hình 1

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0; 4; 1)$ và $B(-2; 0; 3)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=24$. B. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=24$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=6$. D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=6$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 1; 0)$ và vuông góc với đường thẳng $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{-5}$ có phương trình là

A. $x-2z+1=0$. B. $2x+3y-5z+5=0$.

C. $2x+3y-5z-5=0$. D. $x-2z-1=0$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+t \\ z = -1+t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 3-t \\ y = 1-2t \\ z = 5+t \end{cases}$ bằng

A. 60°.   B. 120°.   C. 30°.   D. 90°.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Thí sinh trả lời từ câu 13 đến câu 16. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$.

a) Tập xác định của hàm số đã cho là $D = (-3; 3)$.

b) Hàm số đã cho có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$ $(-3 < x < 3)$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là $\dfrac{9}{2}$.

d) Phương trình $2f(x) - 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x) = 3\sin x$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x = \pi$. Hình phẳng (H_a) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x = a$ với $a \in (0; \pi)$.

a) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\cos x + C$.

b) Diện tích của hình phẳng (H) bằng 6.

c) Diện tích của hình phẳng (H_a) bằng $3|\cos a - 1|$.

d) Nếu diện tích của (H_a) bằng $\dfrac{2}{3}$ diện tích của (H) thì $a \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(6; 1; 0)$, $B(-1; 3; 2)$ và $C(1; -1; 1)$.

a) Trọng tâm của tam giác ABC là $I(2; 1; 1)$.

b) Biết rằng C là trọng tâm của tam giác ABE. Toạ độ của điểm E là $(-2; -7; 1)$.

c) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (Oyz) bằng $\sqrt{37}$.

d) Xét điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 3\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng AM bằng $\sqrt{37}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;\ 1;\ 9)$, đường thẳng d: $\begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng (α): $x + y - z + 3 = 0$.

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (1;\ 1;\ -1)$.

b) Điểm M thuộc đường thẳng d.

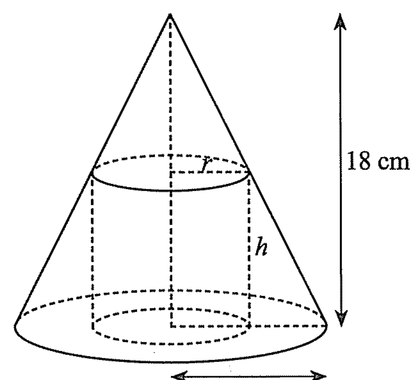
c) Một điểm A bất kì thuộc đường thẳng d đều có toạ độ dạng $A(t;\ -1 - t;\ 2 + 2t)$.

d) Đường thẳng Δ đi qua điểm M, cắt đường thẳng d và song song với mặt phẳng (α) có phương trình là $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-4}{5}$.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

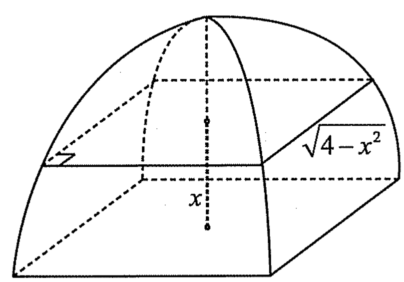
Thí sinh trả lời từ câu 17 đến câu 22.

Câu 17. Hình bên cho biết một hình trụ bán kính đáy r (cm), chiều cao h (cm) nội tiếp hình nón có bán kính đáy 9 cm, chiều cao 18 cm. Tìm giá trị của r để thể tích của hình trụ là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của cm).



Hình 2

Câu 18. Một cái màn chụp có dạng như hình vẽ bên. Biết rằng mặt cắt của cái màn theo mặt phẳng song song với mặt phẳng đáy và cách mặt đáy một khoảng x (m), $0 \le x \le 2$, là một hình vuông cạnh bằng $\sqrt{4 - x^2}$ (m). Thể tích của cái màn là bao nhiêu mét khối? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)



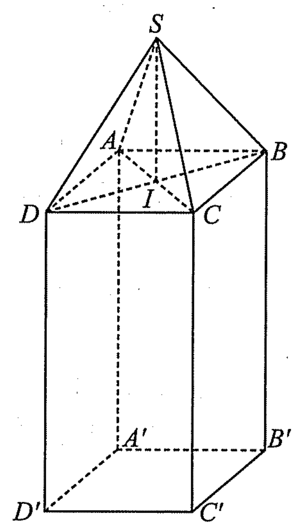
Hình 3

Câu 19. Một doanh nghiệp có 45% nhân viên là nữ. Tỉ lệ nhân viên nữ có bằng đại học là 30% và tỉ lệ nhân viên nam có bằng đại học là 25%. Chọn ngẫu nhiên 1 nhân viên nam và 1 nhân viên nữ của doanh nghiệp. Biết rằng chỉ một trong hai nhân viên có bằng đại học, tính xác suất người đó là nhân viên nữ. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.)

Câu 20. Một hộp chứa 9 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 9. Bạn An lấy ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp, xem số rồi bỏ ra ngoài. Nếu thẻ đó được đánh số chẵn, An cho thêm vào hộp thẻ số 10, 11; ngược lại, An cho thêm vào hộp thẻ số 12, 13, 14. Sau đó, Bạn Việt lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 3 thẻ từ hộp. Gọi X là tích các số trên thẻ Việt lấy ra. Tính xác suất của biến cố An lấy được thẻ ghi số chẵn biết rằng X chia hết cho 2. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.)

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2; 2; 0)$, $B(2; 0; -2)$ và mặt phẳng (P): $x+2y-z-1=0$. Xét điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA = MB$ và số đo góc $\widehat{AMB}$ lớn nhất. Khi đó giá trị $a + b + c$ (làm tròn đến hàng phần trăm) bằng bao nhiêu?

Câu 22. Để chuẩn bị cho một buổi triển lãm quốc tế, các trang sức có giá trị lớn được đặt bảo mật trong các khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ và đặt lên phía trên một trụ hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông (như hình vẽ bên). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét) sao cho $A'(0; 0; 0)$, $A(0; 0; 1)$, $B(0; 0,5; 1)$. Biết rằng, ban tổ chức sự kiện dự định dùng các tấm kính cường lực hình tam giác cân có cạnh bên là 60 cm để ráp lại thành khối chóp nói trên. Khi đó, toạ độ điểm S là $(a; b; c)$. Tính giá trị của $a + b + c$. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.)



Hình 4

PHẦN BA. HƯỚNG DẪN – ĐÁP ÁN

ÔN TẬP THEO CHỦ ĐỀ

Chủ đề I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. D **Câu 2.** D

Câu 3. D

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó, ta thấy chỉ có khẳng định $f(1) > f(3)$ đúng.

Câu 4. B

Hàm số có các điểm cực trị là $x = -1$ và $x = 2$.

Câu 5. D

$f'(x) = e^x(x+1); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng xét dấu của đạo hàm:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Từ đó, hàm số có $x = -1$ là điểm cực tiểu.

Câu 6. C

$f'(x) = 1 + \dfrac{4}{(x-3)^2} > 0$ với mọi $x \in [-1; 2]$.

Suy ra $M = \max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 7$; $m = \min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(-1) = 1$.

Vậy $M - m = 6$.

Câu 7. D

$f'(x) = 2 - e^x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\ln 2$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$2\ln 2$	$\searrow$	$6 - e^2$

Từ đó $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(\ln 2) = 2\ln 2$.

Câu 8. C

Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = -2$ và hai tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

Câu 9. A

$$y = \frac{x^2 - x + 2}{x+1} = x - 2 + \frac{4}{x+1}.$$

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = x - 2$.

Câu 10. D

Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -\frac{1}{3}$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = -\frac{1}{3}$ hay $3f(x) + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. a) Đúng. b) Đúng. c) Sai. d) Đúng.

Câu 2. a) Đúng. b) Sai. c) Sai. d) Đúng.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = x^2 - 4x + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Bảng xét dấu của đạo hàm:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

Câu 3. a) Đúng. b) Sai. c) Sai. d) Đúng.

$f'(x) = e^x(x^2 + 2x) = e^x x(x + 2)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 0$.

Bảng xét dấu của đạo hàm:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Câu 4.

a) Đúng.

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

b) Sai.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 1)$ và $(1; 3)$; không đồng biến trên $(-1; 3)$.

c) Sai.

-1 và 3 là hai điểm cực trị của hàm số, không phải là giá trị cực trị.

d) Sai.

Giá trị lớn nhất của hàm số trên nửa đoạn $(1; 2]$ bằng $f(2)$ và $f(2) < -2$.

Câu 5. a) Đúng. b) Sai. c) Sai. d) Đúng.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x-1}$; $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ với $x \neq 1$.

Đồ thị của hàm số đã cho có tiệm cận xiên là $y = x + 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

Câu 6. a) Sai. b) Sai. c) Đúng. d) Đúng.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - x.2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

Câu 7. a) Đúng. b) Sai. c) Đúng. d) Sai.

$f'(x) = 6x^2 + 2ax - 6$.

Theo giả thiết, ta có $f'(1) = 0$ và $f(1) = 4$.

Suy ra $\begin{cases} 2a = 0 \\ a + b - 4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 8. \end{cases}$

Vậy $a + b = 8$.

Với $a = 0$, $b = 8$ ta có $f(x) = 2x^3 - 6x + 8$.

$f'(x) = 6x^2 - 6$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.

Bảng xét dấu của đạo hàm:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $f(x)$ đạt giá trị cực đại tại $x = -1$ và giá trị cực đại là $f(-1) = 12$.

Hàm số $f(x)$ đạt giá trị cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu là $f(1) = 4$.

Câu 8. a) Đúng. b) Sai. c) Đúng. d) Đúng.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x^2 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 0, x \neq 1. \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-2; +\infty) \setminus \{0; 1\}$.

$$y = \frac{\sqrt{2x+4}-2}{x^2-x} = \frac{2x}{x(x-1)\left(\sqrt{2x+4}+2\right)} = \frac{2}{(x-1)\left(\sqrt{2x+4}+2\right)}.$$

$\lim\limits_{x\to 0} y = -\frac{1}{2}$, suy ra $x = 0$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$, suy ra $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to +\infty} y = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{(x-1)\left(\sqrt{2x+4}+2\right)} = 0$, suy ra $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho. Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang.

Câu 9. a) Đúng. b) Sai. c) Đúng. d) Sai.

$$C'(t) = 0,05.\frac{t^2+t+1-t(2t+1)}{(t^2+t+1)^2} = \frac{1-t^2}{20(t^2+t+1)^2},\ t \geq 0.$$

Bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
$C'(t)$		$+$	0	$-$	
$C(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{60}$	$\searrow$	0

Từ đó, a) và c) đúng; b) sai.

Vì giá trị lớn nhất của $C(t)$ là $\frac{1}{60} \approx 0,01666... < 0,02$ nên d) sai.

Câu 10. a) Sai. b) Đúng. c) Sai. d) Đúng.

Ta có $2x + 2y + \pi x = 4$, suy ra $y = 2 - \frac{(\pi+2)x}{2}$.

$$S(x) = 2xy + \frac{\pi x^2}{2} = 2x\left(2 - x - \frac{\pi x}{2}\right) + \frac{\pi x^2}{2} = 4x - 2x^2 - \frac{\pi x^2}{2}\ (\mathrm{m}^2).$$

Ta có $x > 0$ và $y > 0$, suy ra $0 < x < \frac{4}{\pi+2}$.

$S'(x) = 4 - 4x - \pi x$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{\pi+4}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{4}{\pi+4}$		$\dfrac{4}{\pi+2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{8}{\pi+4}$	$\searrow$	$\dfrac{8\pi}{(\pi+2)^2}$

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Với $x \in [0; 4]$, ta có:

$x^2 - (m+1)x - m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 \geq m(x+1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - x + 2}{x+1} \geq m$ (do $x + 1 > 0$ với mọi $x \in [0; 4]$). (1)

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x+1}$, $x \neq -1$. Hàm số này liên tục trên $[0; 4]$;

$f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -3$ (loại vì $-3 \notin [0; 4]$).

$f(0) = 2; f(1) = 1;\ f(4) = \dfrac{14}{5}$.

Suy ra $\min\limits_{[0;4]} f(x) = f(1) = 1$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 4] \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{[0;4]} f(x) \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 2. Kí hiệu x là hoành độ của điểm B $(0 < x < 3)$.

Ta có $AB = 2x$, $BC = 9 - x^2$.

Từ đó, diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S(x) = 18x - 2x^3$, $0 < x < 3$.

$S'(x) = 18 - 6x^2$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ (do $x > 0$).

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt{3}$		3
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	$\nearrow$	$12\sqrt{3}$	$\searrow$	0

Từ đó $\max\limits_{(0;3)} S(x) = S(\sqrt{3}) = 12\sqrt{3} \approx 20,8$.

Câu 3. Ta có $x\,.\,2x\,.\,h = 72 \Rightarrow h = \dfrac{36}{x^2}$.

Diện tích toàn phần của chiếc hộp là:

$S(x) = 2(x\,.\,2x + xh + 2xh) = 2(2x^2 + 3xh) = 4x^2 + \dfrac{216}{x}, x > 0.$

$S'(x) = 8x - \dfrac{216}{x^2}.$

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3.$

Bảng biến thiên:

x	0		3		$+\infty$
$S'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$S(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	108	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy diện tích toàn phần nhỏ nhất của chiếc hộp là 108 cm^2.

Câu 4. $\overline{C}'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{8}{x^2}, x > 0.$

$\overline{C}'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$ (do $x > 0$).

Bảng biến thiên:

x	0		4		$+\infty$
$\overline{C}'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\overline{C}(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó, chi phí trung bình thấp nhất là 7 triệu đồng/tạ.

Câu 5. Tốc độ thay đổi số lượng ong của đàn theo thời gian t là

$T(t) = P'(t) = 2.10^7.\dfrac{e^{-t}}{(1+1000e^{-t})^2}.$

Ta có:

$$T'(t) = 2.10^7.\frac{-e^{-t}.(1+1000e^{-t})^2 - e^{-t}.2.(1+1000e^{-t}).(-1000e^{-t})}{(1+1000e^{-t})^4}$$

$$= 2.10^7.\frac{e^{-t}(1000e^{-t}-1)}{(1+1000e^{-t})^3} = 2.10^7.\frac{e^{-t}(1000-e^{t})}{(1+1000e^{-t})^3}.$$

$T'(t) = 0 \Leftrightarrow 1\,000 - e^t = 0 \Leftrightarrow t = \ln 1\,000.$

Bảng xét dấu của đạo hàm:

t	0		$\ln 1000$		20
$T'(t)$		$+$	0	$-$	

Từ đó, $T(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = \ln 1000 \approx 7$.

Vậy đàn ong tăng nhanh nhất tại thời điểm khoảng $t = 7$ tuần.

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

A. Nguyên hàm

Câu 1. A

$$\int x^{\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x=\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1}+C=\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C.$$

Câu 2. B

$$\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x=\int 9^{x}\,\mathrm{d}x=\frac{9^{x}}{\ln 9}+C.$$

Câu 3. B

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int (x-\sin x)\,\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}x-\int \sin x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\cos x+C.$$

Câu 4. D

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \frac{2\sqrt{x}-1}{x}\,\mathrm{d}x=\int\left(2x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\ln|x|+C=4\sqrt{x}-\ln x+C.$$

Câu 5. C

$$f(x)=(\tan x+\cot x)^2=\tan^2 x+\cot^2 x+2\tan x.\cot x=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\tan x-\cot x+C.$

Câu 6. C

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int (x-1)^2\,\mathrm{d}x=\int (x^2-2x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-x^2+x+C.$

Vậy $F(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+x+C.$

Câu 7. D

$f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int (2x-3e^{x})\,\mathrm{d}x=x^2-3e^{x}+C$; $f(0)=0^2-3.e^0+C=5$, suy ra $C=8$.

Do đó $f(x)=x^2-3e^{x}+8$.

Câu 8. C

$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int 5x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int 5x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x=5\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=2x^{\frac{5}{2}}+C$, suy ra $F(x)=2x^{\frac{5}{2}}+C$;

$F(1)=2+C=5$ suy ra $C=3$.

Vậy $F(4)=2.4^{\frac{5}{2}}+3=67.$

Câu 9. A

$\int f(x)\,dx = \int 4^x\,dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C = \frac{4x}{2\ln 2} + C$, suy ra $F(x) = \frac{4^x}{2\ln 2} + C$;

$F(1) = \frac{2}{\ln 2} + C = \frac{1}{\ln 2}$,

suy ra $C = -\frac{1}{\ln 2}$.

Do đó $F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4^{\frac{3}{2}}}{2\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{3}{\ln 2}$, suy ra $F\left(\frac{3}{2}\right).\ln 2 = 3$.

Câu 10. B

$v(t) = \int a(t)\,dt = \int (2t-1)\,dt = t^2 - t + C$; $v(0) = 0^2 - 0 + C = 2$, suy ra $C = 2$.

Do đó $v(t) = t^2 - t + 2$.

B. Tích phân

Câu 11. A

$$\int_2^5 f'(x)\,dx = f(x)\Big|_2^5 = f(5) - f(2) = 2 - 3 = -1.$$

Câu 12. C

$$\int_3^5 f(x)\,dx = \int_1^5 f(x)\,dx - \int_1^3 f(x)\,dx = 20 - 6 = 14.$$

Câu 13. B

$$\int_{-1}^4 [4 - 3f(x)]\,dx = 4\int_{-1}^4 dx - 3\int_{-1}^4 f(x)\,dx = 4.(4+1) - 3.2 = 14.$$

Câu 14. A

$$2\int_1^2 [f(x) + 3g(x)]\,dx + 3\int_1^2 [5f(x) - 2g(x)]\,dx = 17\int_1^2 f(x)\,dx = 2.9 + 3.11 = 51.$$

Suy ra $\int_1^2 f(x)\,dx = 3$.

Câu 15. C

$$\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2x^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^4 = \left(\frac{16}{3} + 4\right) - \left(\frac{2}{3} + 2\right) = \frac{20}{3}.$$

Câu 16. D

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2\sin x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = (-2\cos x + \tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(-1 + \sqrt{3}\right) - (-2 + 0) = 1 + \sqrt{3}.$$

Câu 17. C

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^2 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = (-\cot x - x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}\right) - \left(-\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}.$$

Câu 18. D

$$\int_0^1 \frac{2e^{2x}+3}{e^x}\,dx = \int_0^1 \left[2e^x + 3\left(\frac{1}{e}\right)^x\right]dx = \left(2e^x + 3\left(\frac{1}{e}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln\frac{1}{e}}\right)\Bigg|_0^1 = 2e - \frac{3}{e} + 1 = \frac{2e^2+e-3}{e}.$$

Do đó $m=2,\ n=1,\ p=-3$. Vậy $m+2n-p=7$.

Câu 19. B

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1}(3x^2+2)\,dx + \int_{1}^{2}(8x-3)\,dx$$

$$= (x^3+2x)\Big|_{-2}^{1} + (4x^2-3x)\Big|_{1}^{2} = [3-(-12)] + (10-1) = 24.$$

Câu 20. C

$$\int_1^4 (|x-2|+|x-3|)\,dx = \int_1^2 (5-2x)\,dx + \int_2^3 dx + \int_3^4 (2x-5)\,dx = (5x-x^2)\Big|_1^2 + x\Big|_2^3 + (x^2-5x)\Big|_3^4$$

$$= (6-4)+(3-2)+(-4+6) = 5.$$

C. Ứng dụng hình học của tích phân

Câu 21. A

Câu hỏi nhận biết ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng.

Câu 22. B

Câu hỏi nhận biết ứng dụng tích phân tính thể tích khối tròn xoay.

Câu 23. C

Câu hỏi hiểu ứng dụng tích phân tính thể tích khối tròn xoay.

Câu 24. A

$$S = \int_0^4 \left|e^x - (-5)\right|dx = \int_0^4 (e^x+5)dx.$$

Câu 25. C

$$S = \int_{-2}^{3} \left|x^3 - 3x^2\right|dx = \left|\int_{-2}^{3} (x^3-3x^2)dx\right| = \left|\left(\frac{x^4}{4} - x^3\right)\Big|_{-2}^{3}\right| = \frac{75}{4}.$$

Câu 26. B

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} |\sin x|\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Câu 27. C

Ta có $f'(x)=(x^2-1)'=2x; f'(-1)=-2.$

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại điểm $M(-1;0)$ là

$y=f'(-1).(x+1)+f(-1) \Leftrightarrow y=-2(x+1)+0 \Leftrightarrow y=-2x-2.$

Diện tích cần tìm là $S=\int\limits_{-1}^{0}\left|(x^2-1)-(-2x-2)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left|x^2+2x+1\right|\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\dfrac{1}{3}.$

Câu 28. D

Ta có $x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2.$

Thể tích cần tìm là

$V=\pi\int\limits_{0}^{2}(x^2-2x)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{0}^{2}(x^4-4x^3+4x^2)\mathrm{d}x=\pi\left(\dfrac{x^5}{5}-x^4+\dfrac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{2}=\dfrac{16\pi}{15}.$

Câu 29. C

Diện tích hình vuông cạnh $\sqrt{1-x^4}$ là $S(x)=\left(\sqrt{1-x^4}\right)^2=1-x^4.$

Thể tích cần tìm là $V=\int\limits_{-1}^{1}S(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}(1-x^4)\mathrm{d}x=\left(x-\dfrac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\dfrac{8}{5}.$

Câu 30. A

$S_1=\int\limits_{0}^{a}e^x\mathrm{d}x=e^x\Big|_0^a=e^a-1;\ S_2=\int\limits_{0}^{b}e^x\mathrm{d}x=e^x\Big|_0^b=e^b-1.$

Vì $S_2=5S_1+4$ nên $e^b-1=5(e^a-1)+4 \Leftrightarrow e^b=5e^a \Leftrightarrow e^{b-a}=5 \Leftrightarrow b-a=\ln 5.$

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

A. Nguyên hàm

Câu 1.

a) Đúng.

$F'(x)=f(x)$ suy ra $F'(2)=f(2)=-4.2+3=-5.$

b) Đúng.

$F'(x)=(-2x^2+3x)'=-4x+3=f(x).$

c) Đúng.

$G(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(-4x+3)\,\mathrm{d}x=-2x^2+3x+C;$

$G(1)=2$ suy ra $C=1,$ suy ra $G(x)=-2x^2+3x+1.$

Vậy $G(2)=-1.$

d) Sai.

$\int f(-x)\,\mathrm{d}x=\int(4x+3)\,\mathrm{d}x=2x^2+3x+C.$

Mà $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=-2x^2+3x+C,$ suy ra $F(-x)=-2x^2-3x+C\neq f(x).$

Câu 2.

a) Đúng.

$\int f(x)\,dx = \int 2\cos x\,dx = 2\int \cos x\,dx = 2\sin x + C.$

b) Sai.

$\int g(x)\,dx = \int 2\sin^2 \frac{x}{2}\,dx = \int (1-\cos x)\,dx = x - \sin x + C.$

c) Đúng.

$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = x + \sin x + C.$

d) Sai.

$\int \frac{f(x)}{g(x)-1}\,dx = \int \frac{2\cos x}{2\sin^2 \frac{x}{2} - 1}\,dx = \int \frac{2\cos x}{-\cos x}\,dx = \int (-2)\,dx = -2x + C.$

Câu 3.

a) Sai.

$\int f(x)\,dx = \int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C.$

b) Đúng.

$\int \left[f(x) - e^x\right]dx = \int f(x)\,dx - \int e^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} - e^x + C.$

c) Đúng.

$\int f(x).e^x\,dx = \int (3e)^x\,dx = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} + C = \frac{3^x.e^x}{1+\ln 3} + C.$

d) Đúng.

Ta có $F'(x) = f(x)$ suy ra $F'(\log_9 5) = f(\log_9 5) = 3^{\log_9 5} = 3^{\frac{1}{2}\log_3 5} = \sqrt{5}.$

Câu 4. Ta có $f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

a) Đúng.

Trên khoảng $(1; +\infty)$, $F'(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x + 2\right)' = x - 1 = f(x).$

b) Sai.

Trên khoảng $(-\infty; 1)$, $G'(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x - 1\right)' = x - 1 \neq f(x).$

c) Đúng.

Trên khoảng $(1; +\infty)$, $F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x + C$; $F(2) = 3$ suy ra $C = 3$, suy ra $F(x) = \frac{x^2}{2} - x + 3$. Do đó $F(4) = \frac{4^2}{2} - 4 + 3 = 7.$

d) Sai.

$$f(x)=|x-1|=\begin{cases}x-1 & \text{khi } x\ge 1\\ -x+1 & \text{khi } x<1\end{cases} \text{ suy ra } F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-x+C_1 & \text{khi } x\ge 1\\ -\dfrac{x^2}{2}+x+C_2 & \text{khi } x<1.\end{cases}$$

Ta có $F(0)=1$ suy ra $C_2=1$. Mà $F(x)$ liên tục tại $x=1$, suy ra $-\dfrac{1}{2}+C_1=\dfrac{1}{2}+C_2$, suy ra $C_1=2$.

Do đó $F(-2)=-\dfrac{(-2)^2}{2}+(-2)+1=-3$; $F(4)=\dfrac{4^2}{2}-4+2=6$, suy ra $F(-2)+F(4)=3$.

B. Tích phân

Câu 5.

a) Đúng.

$$\int_{-1}^{2} f'(x)\,dx=\left.f(x)\right|_{-1}^{2}=f(2)-f(-1)=13-10=3.$$

b) Sai.

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (3x^2-2x+5)\,dx=\left.(x^3-x^2+5x)\right|_0^1=5.$$

c) Đúng.

$$\int_0^2 3f(x)\,dx=3\int_0^2 (3x^2-2x+5)\,dx=3\left.(x^3-x^2+5x)\right|_0^2=42.$$

d) Đúng.

$$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^2 (3x^3-2x^2+5x)\,dx=\left.\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right)\right|_0^1=\frac{31}{12}.$$

Câu 6.

a) Đúng.

$$\int_0^{\ln 2} g(x)\,dx=\int_0^{\ln 2}(2e^x-3)\,dx=\left.(2e^x-3x)\right|^{\ln 2}=2-3\ln 2.$$

b) Sai.

$$\int_0^2 g(x)\,dx=\int_0^2 [2f(x)-3]\,dx=2\int_0^2 f(x)\,dx-3\int_0^2 dx=2\int_0^2 f(x)\,dx-6.$$

Suy ra $2\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=6+\int_0^2 g(x)\,dx$.

c) Sai.

$$\int_2^7 [2f(x)-g(x)]\,dx=\int_2^7\left[2e^x-(2e^x-3)\right]dx=\int_2^7 3\,dx=\left.3x\right|_2^7=15.$$

d) Đúng.

$$\int_0^1 f(x).g(x)\,dx=\int_0^1 (2e^{2x}-3e^x)\,dx=\left.\left(2\frac{e^{2x}}{\ln e^2}-3e^x\right)\right|_0^1=\left.(e^{2x}-3e^x)\right|_0^1=e^2-3e+2.$$

Suy ra $a=1$, $b=-3$, $c=2$.

Vậy $a+b+c=1-3+2=0$.

Câu 7.

a) Đúng.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2f'(x)\,dx = 2f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)\right] = 2\left(\frac{\pi}{2}.\sin\frac{\pi}{2} - 0.\sin 0\right) = 2.\frac{\pi}{2} = \pi.$$

b) Sai.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) - \sin x]\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x)\,dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

c) Sai.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sin x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{9}\right) = \frac{5\pi^2}{72}.$$

d) Đúng.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{[f(x)]^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Câu 8.

a) Đúng.

$$\int_1^4 f'(x)\,dx = f(x)\Big|_1^4 = \frac{1-3\sqrt{4}}{4} - \frac{1-3\sqrt{1}}{1} = \frac{3}{4}.$$

b) Đúng.

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{x} - 3x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = (\ln x - 6\sqrt{x})\Big|_1^4 = (\ln 4 - 6.2) - (\ln 1 - 6) = \ln 4 - 6.$$

c) Sai.

$$\int_1^4 xf(x)\,dx = \int_1^4 (1 - 3x^{\frac{1}{2}})\,dx = (x - 2x^{\frac{3}{2}})\Big|_1^4 = (4-16) - (1-2) = -11.$$

d) Sai.

$$\int_1^4 [f'(x) + 2x.f(x)]\,dx = \int_1^4 f'(x)dx + 2.\int_1^4 xf(x)dx$$

$$= \frac{3}{4} + 2.(-11) = -\frac{85}{4}.$$

Câu 9.

a) Đúng.

$$\int_0^{12} v_1(t)\,dt = \int_0^{12} 2t\,dt = t^2\Big|_0^{12} = 144.$$

b) Đúng.

$v_1(12) = 2.12 = 24$ (m/s).

c) Đúng.

$v_2(t) = 24 - 8(t-12) = 120 - 8t;\ v_2(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15.$

Thời gian từ lúc ô tô giảm tốc độ cho đến khi dừng hẳn là 15 – 12 = 3 (giây).

d) Sai.

$$S = \int_0^{15} |v(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{12} v_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_{12}^{15} v_2(t)\,\mathrm{d}t;\ S_1 = \int_0^{12} v_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{12} 2t\,\mathrm{d}t = t^2\Big|_0^{12} = 144;$$

$$S_2 = \int_{12}^{15} v_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{12}^{15} (120-8t)\,\mathrm{d}t = (120t - 4t^2)\Big|_{12}^{15} = 36.$$

Vậy $S = S_1 + S_2 = 144 + 36 = 180$ (m).

C. Ứng dụng hình học của tích phân

Câu 10.

a) Đúng.

b) Sai.

c) Đúng.

d) Đúng.

Câu 11.

a) Đúng.

$$S = \int_2^6 \left|\frac{x+1}{x}\right| \mathrm{d}x = \int_2^6 \left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = (x + \ln x)\Big|_2^6 = (6 + \ln 6) - (2 + \ln 2) = 4 + \ln 3.$$

b) Sai.

$$S = \int_2^6 |f(x) - 1|\,\mathrm{d}x = \int_2^6 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x\Big|_2^6 = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3.$$

c) Đúng.

$$V = \pi\int_2^6 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_2^6 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \pi\left(x + 2\ln x - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_2^6 = \pi\left(2\ln 3 + \frac{13}{3}\right) = \frac{(13 + 6\ln 3)\pi}{3}.$$

d) Sai.

$$V = \pi\int_2^6 \left[f^2(x) - 1\right]\mathrm{d}x = \pi\int_2^6 \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \pi\left(2\ln x - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_2^6 = \pi\left(2\ln 3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{(1 + 6\ln 3)\pi}{3}.$$

Câu 12.

a) Đúng.

b) Đúng.

c) Sai.

$$S = \int_{-1}^{2} \left|(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)\right|\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,\mathrm{d}x = -2\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)\,\mathrm{d}x.$$

d) Sai.

$$S=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,\mathrm{d}x=\left(-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right)\Big|_{-1}^{2}=9, \text{ suy ra } \ln S=2\ln 3.$$

Vậy $a^2+b^2=13$.

Câu 13.

a) Đúng.

b) Sai.

$$S=\int_0^1\left|2x^2-2\sqrt{x}\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left(2\sqrt{x}-2x^2\right)\mathrm{d}x.$$

c) Đúng.

$$V=\pi\int_0^1\left[\left(2\sqrt{x}\right)^2-\left(2x^2\right)^2\right]\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(4x-4x^4\right)\mathrm{d}x.$$

d) Sai.

Ta có $S=\int_0^1\left|2x^2-2\sqrt{x}\right|\mathrm{d}x=\int_0^1(2\sqrt{x}-2x^2)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}$;

$$V=\pi\int_0^1\left(4x-4x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(2x^2-\frac{4}{5}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{6\pi}{5}.$$

Suy ra $\frac{V}{S}=\frac{9\pi}{5}$. Do đó $a=9;\ b=5$, suy ra $2a-b=13$.

Câu 14.

a) Đúng.

b) Sai.

$$S=\int_{-1}^{4}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x.$$

c) Đúng.

Nhận xét "diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=1$, $x=4$" lớn hơn "diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=-1$, $x=1$". Do đó $\int_1^4|f(x)|\,\mathrm{d}x>\int_{-1}^1|f(x)|\,\mathrm{d}x$,

suy ra $\left|F(x)\big|_1^4\right|>\left|F(x)\big|_{-1}^1\right|$, suy ra $F(1)-F(4)>F(1)-F(-1)$, suy ra $F(-1)>F(4)$. (1)

Mà $F(x)$ đồng biến trên $(-1;\ 1)$, nghịch biến trên $(1;\ 4)$, do đó $F(1)>F(-1)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $F(1)>F(-1)>F(4)$.

d) Sai.

$$V=\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2\mathrm{d}x+\pi\int_{1}^{4}[f(x)]^2\mathrm{d}x=\pi\int_{-1}^{4}[f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

A. Nguyên hàm

Câu 1. Ta có $F'(x)=\left(2x-3+\dfrac{6}{x}\right)'=2-\dfrac{6}{x^2}=\dfrac{2x^2-6}{x^2}$ và $F'(x)=f(x)$, suy ra $a=2$; $b=0$; $c=-6$. Do đó $a+b-c=8$.

Câu 2. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(2\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x=-2\cos x-\sin x+C$ suy ra $F(x)=-\sin x-2\cos x$, suy ra $a=-1$; $b=-2$. Do đó $a+2b=-5$.

Câu 3. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(2^x+3x^2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{\ln 2}+x^3+C$, suy ra $F(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}+x^3+C$.

Ta có $F(1)=\dfrac{2}{\ln 2}+1+C=\dfrac{2}{\ln 2}\Rightarrow C=-1$. Do đó $F(2)=\dfrac{2^2}{\ln 2}+2^3-1\approx 12,8$.

Câu 4. $\int h'(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{\sqrt{2}}{x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\ln|x|+C$, suy ra $h(x)=\sqrt{2}\ln|x|+C$.

Ta có $h(1)=\sqrt{2}\ln 1+C=3$, suy ra $C=3$. Do đó $h(5)=\sqrt{2}\ln 5+3\approx 5,3$ (m).

Câu 5. Ô tô dừng hẳn khi $v(t)=0\Leftrightarrow\dfrac{35}{2}-\dfrac{7}{2}t=0\Leftrightarrow t=5$ (giây).

Quãng đường ô tô di chuyển từ lúc đạp phanh là

$s(t)=\int v(t)\,\mathrm{d}t=\int\left(\dfrac{35}{2}-\dfrac{7}{2}t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{35t}{2}-\dfrac{7t^2}{4}+C$.

Ta có $s(0)=0$, suy ra $C=0$, suy ra $s(t)=\dfrac{35t}{2}-\dfrac{7t^2}{4}$. Do đó $s(5)=\dfrac{35}{2}.5-\dfrac{7}{4}.5^2=43,75$ (m).

B. Tích phân

Câu 6. $s=\int_0^4 v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2 2t\,\mathrm{d}t+\int_2^4 4\,\mathrm{d}t=t^2\Big|_0^2+4t\Big|_2^4=12$.

Vậy quãng đường vật dịch chuyển được trong 4 giây đầu tiên bằng 12 m.

Câu 7. $P=\int_{50}^{100}P'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{50}^{100}(18-0,04x)\,\mathrm{d}x=(18x-0,02x^2)\Big|_{50}^{100}=750$.

Vậy sự thay đổi lợi nhuận khi bán được từ 50 tấn sản phẩm đến 100 tấn sản phẩm bằng 750 triệu đồng.

Câu 8. $V=\int_0^{15}V'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{15}(160-2t)\,\mathrm{d}t=(160t-t^2)\Big|_0^{15}=2\,175$.

Vậy thể tích nước chảy ra khỏi bồn trong 15 phút đầu tiên kể từ khi nước bị rò rỉ bằng 2 175 lít.

Câu 9. $\overline{T}=\dfrac{1}{12-0}\displaystyle\int_0^{12}T(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{12}\int_0^{12}\left(47+4t-\dfrac{1}{3}t^2\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{12}\left(47t+2t^2-\dfrac{1}{9}t^3\right)\Bigg|_0^{12}=55.$

Vậy nhiệt độ trung bình trong khoảng thời gian đó bằng 55 °C.

Câu 10. $h=\displaystyle\int_0^{40}|h'(t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^{19}|-80|\,\mathrm{d}t+\int_{19}^{21}|37t-783|\,\mathrm{d}t+\int_{21}^{40}|-6|\,\mathrm{d}t$

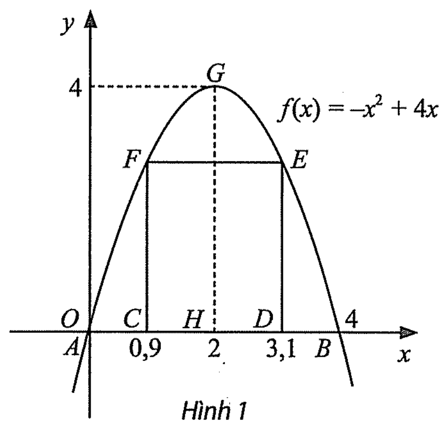
$$=80t\Big|_0^{19}+\left(783t-\frac{37t^2}{2}\right)\Bigg|_{19}^{21}+6t\Big|_{21}^{40}=1\,720.$$

Vậy độ cao vị trí của anh Nam khi bắt đầu nhảy khỏi trực thăng bằng 1 720 m.

C. Ứng dụng hình học của tích phân

Câu 11. Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho AB trùng Ox, A trùng O. Khi đó parabol có đỉnh là $G(2;\,4)$ và đi qua gốc toạ độ.

Giả sử parabol có dạng $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$. Vì parabol có đỉnh là $G(2;\,4)$ và đi qua điểm $O(0;\,0)$ nên phương trình của parabol là $y=f(x)=-x^2+4x$.



Hình 1

Diện tích của cánh cổng là

$$S=\int_0^4(-x^2+4x)\mathrm{d}x=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Bigg|_0^4=\frac{32}{3}\ (\mathrm{m}^2).$$

Chiều cao của cửa là $CF=DE=f(0{,}9)=2{,}79$ (m); chiều rộng của cửa là $CD=4-2\,.\,0{,}9=2{,}2$ (m).

Diện tích phần hai cánh cửa là

$$S_{CDEF}=CD\,.\,CF=2{,}79\,.\,2{,}2=6{,}138\ (\mathrm{m}^2).$$

Diện tích phần xiên hoa trang trí là

$$S_{xh}=S-S_{CDEF}=\frac{32}{3}-6{,}138=\frac{6793}{1500}\approx 4{,}53\ (\mathrm{m}^2).$$

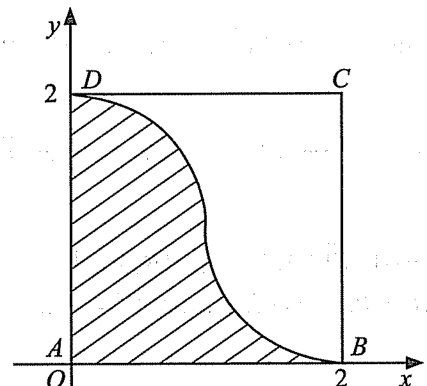
Câu 12. Thể tích chậu cây là

$$V=\pi\int_0^4\left(\sqrt{x}+2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^4\left(x+4\sqrt{x}+4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^2}{2}+\frac{8}{3}x\sqrt{x}+4x\right)\Bigg|_0^4=\frac{136\pi}{3}\approx 142,4\ (\mathrm{dm}^3).$$

Câu 13. $V=\pi\int_1^4(x^2-4x+5)^2\,\mathrm{d}x=\frac{78\pi}{5}\approx 49\ (\mathrm{cm}^3)$.

Câu 14.

Chọn hệ trục toạ độ như hình dưới đây. Ta có phương trình các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AD là $y=1-\sqrt{1-(x-2)^2}$; $y=1+\sqrt{1-x^2}$.



Hình 2

Vậy thể tích của vật trang trí đó là

$$V=\pi\int_1^2\left(1-\sqrt{1-(x-2)^2}\right)^2\mathrm{d}x+\pi\int_0^1\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2\mathrm{d}x\approx 10,5\ (\mathrm{cm}^3).$$

Câu 15. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $f(t)=0,73t^3-2t^2+t+0,6$; $g(t)=0,17t^2-0,5t+1,1$ và hai đường thẳng $t=0$, $t=2$ là

$$\int_0^2\left|f(t)-g(t)\right|\mathrm{d}t=\int_0^2\left|0,73t^3-2,17t^2+1,5t-0,5\right|\mathrm{d}t=\frac{13}{15}.$$

Kết quả trên thể hiện sự chênh lệch lượng mưa ở hai địa điểm khác nhau sau 2 giờ là $\frac{13}{15}$ inch.

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. D

Câu 2. A

Do tứ giác $ADD'A'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD'}$.

Câu 3. C

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$.

Do G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Câu 4. C

Ta có $\overrightarrow{B'D'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{MN}$ và $B'D' = 2MN$, suy ra $\overrightarrow{B'D'} = 2\overrightarrow{MN}$.

Câu 5. D

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} &= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\\ &= -AB.AC.\cos\widehat{BAC} = -2.2.\cos 60^\circ = -2.\end{aligned}$$

Câu 6. B

Ta có $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$.

Câu 7. C

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (1 + 2; -1 + 3; 2 + (-3)) = (3; 2; -1)$.

Câu 8. D

Ta có $3\vec{a} = (3 . 2; 3 . (-4); 3 . 0) = (6; -12; 0)$.

Câu 9. A

Ta có $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} = (2x - 4y; -3x + y; x - y)$ nên $\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ -3x + y = -7 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow x + y = 5$.

Câu 10. D

Ta có $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = (x - 3y - 2z; -x + 2y + 5z; 2x - 2y + z)$

nên $\begin{cases} x - 3y - 2z = -2 \\ -x + 2y + 5z = -3 \\ 2x - 2y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 3$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1.

a) Đúng.

Do M là trung điểm của đoạn thẳng AB nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

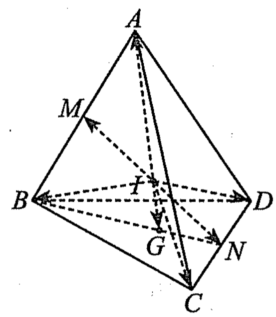
b) Đúng.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}\\ \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)+2\overrightarrow{MN}+\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}\right).$

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD nên $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$, $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$.

c) Đúng.



Hình 1

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MA}\\ \overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MB}\\ \overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{NC}\\ \overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{ND}\end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=2\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}\right)+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}\right)=\vec{0}.$

d) Sai.

Do $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AI}$.

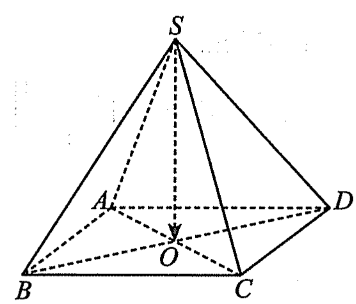
Mặt khác, vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

Suy ra $4\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AG}$, suy ra $4\overrightarrow{AI}-3\overrightarrow{AG}=\vec{0}$.

Câu 2.

a) Đúng.

Do tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$, suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.



Hình 2

b) Đúng.

Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên O là trung điểm của AC, suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

c) Sai.

Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên O là trung điểm của các cạnh AC, BD.

Suy ra $\begin{cases}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}\\ \overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}.$

d) Đúng.

Ta có $\left(\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC}\right).\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}\right)=\overrightarrow{CA}.\left(2\overrightarrow{SO}\right)=2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{SO}.$

Do hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, suy ra $\overrightarrow{SO} \perp \overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{SO} = 0$.

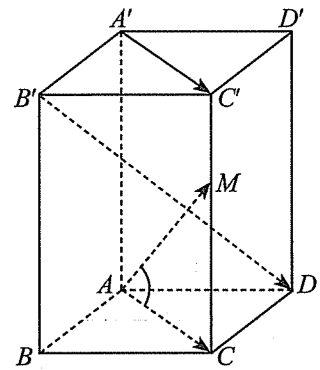
Suy ra $\left(\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC}\right).\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}\right) = 0$.

Câu 3.

a) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{AA'}$ cùng phương với $\overrightarrow{CM}$ và $AA' = \dfrac{3}{2}CM$, suy ra $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CM}$.

b) Sai.



Hình 3

Do $\overrightarrow{AC}$ cùng phương với $\overrightarrow{A'C'}$,

suy ra $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{CAM}$,

suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \cos\widehat{CAM} = \dfrac{AC}{AM} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

c) Sai.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

d) Sai.

Ta có $\overrightarrow{B'D} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AD} - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}\right) = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}$.

Do đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'D} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}\right).\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}\right)$

$$= -AB^2 + AD^2 - \frac{2}{3}AA'^2 = -1 + 4 - 6 = -3.$$

Câu 4.

a) Đúng.

Ta có $2\vec{a} = (2.(-2);\ 2.3;\ 2.1) = (-4;\ 6;\ 2)$.

b) Đúng.

Ta có $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = (7;\ 5;\ -1) = \vec{d}$.

c) Đúng.

Ta có $\vec{a} + 2\vec{b} = (-2 + 2.1;\ 3 + 2.(-1);\ 1 + 2.2) = (0;\ 1;\ 5)$.

d) Sai.

Ta có $2\vec{a} - 3\vec{b} = (-7;\ 9;\ -4) \neq \vec{c}$.

Câu 5.

a) Sai.

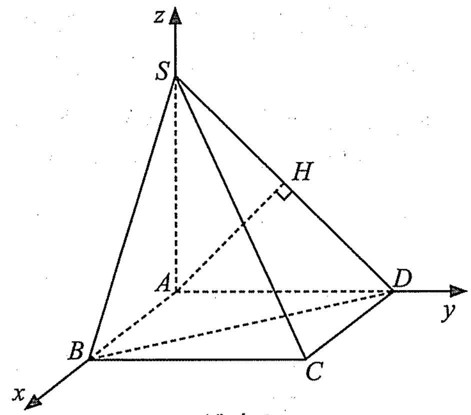
Do C thuộc mặt phẳng (Oxy) với O trùng A và B, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên các trục Ox, Oy nên $C(2;\ 3;\ 0)$.

b) Đúng.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.

Suy ra tam giác SCD vuông tại D.

Khi đó $S_{SCD} = \frac{1}{2}CD.SD = \frac{1}{2}.2.3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.



Hình 4

c) Đúng.

Do $CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$.

Mà $(SCD) \cap (SAD) = SD$.

Kẻ AH vuông góc với SD, với $H \in SD$, ta được hình chiếu vuông góc của điểm A trên (SCD) là trung điểm H của SD nên $H\left(0; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ (do tam giác SAD vuông cân tại A).

d) Sai.

Ta có $\overrightarrow{SC} = (2;\ 3;\ -3)$, $\overrightarrow{SB} = (2;\ 0;\ -3)$, $\overrightarrow{SD} = (0;\ 3;\ -3)$.

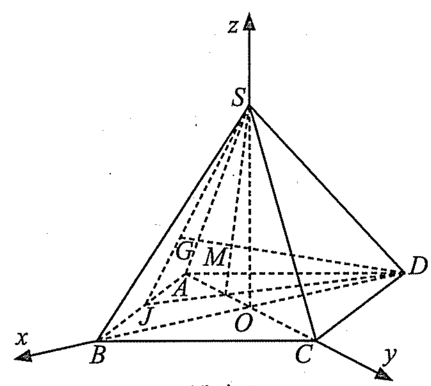
Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SCD). Ta có $\left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD}\right] = (9;\ 6;\ 6)$ nên ta có thể chọn $\vec{n} = \frac{1}{3}\left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD}\right] = (3;\ 2;\ 2)$.

Suy ra $\sin\alpha = \left|\sin\left(\overrightarrow{SC}, \vec{n}\right)\right| = \frac{|2.3 + 3.2 + (-3).2|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2}.\sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{22}.\sqrt{17}}$, suy ra $\sin\alpha < \frac{1}{3}$.

Câu 6.

a) Sai.

Ta có $AB = 2\sqrt{2} \Rightarrow OA = OB = 2 \Rightarrow A(0;\ -2;\ 0)$.



Hình 5

b) Đúng.

Ta có $OB = 2 \Rightarrow B(2;\ 0;\ 0)$;

$OS = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3} \Rightarrow S(0;\ 0;\ 2\sqrt{3})$.

Suy ra toạ độ của trọng tâm của tam giác SAB là $G\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

c) Sai.

Ta có $C(0;\ 2;\ 0) \Rightarrow \overrightarrow{CE} = (a;\ -2;\ b)$, $\overrightarrow{CG} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Vì C, E, G thẳng hàng nên $\overrightarrow{CE}$ cùng phương với $\overrightarrow{CG}$

$$\Rightarrow \frac{3a}{2} = \frac{3}{4} = \frac{b\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow a.b = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

d) Đúng.

Do D đối xứng với B qua mặt phẳng (Oyz) nên với mọi điểm M trên mặt phẳng (Oyz), ta đều có $MG + MB = MG + MD$.

Mặt khác, hai điểm G và D khác phía so với mặt phẳng (Oyz) nên $MG + MD$ nhỏ nhất khi và chỉ khi ba điểm G, D, M thẳng hàng.

Ta có $D(-2; 0; 0)$, $\overrightarrow{DM} = (2; m; n)$, $\overrightarrow{DG} = \left(\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Vì G, D, M thẳng hàng nên $\overrightarrow{DM}$ cùng phương với $\overrightarrow{DG}$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = -\frac{3m}{2} = \frac{n\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow m^2 + n^2 = 1.$$

Câu 7.

a) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3-(-1); -2-1; -1-(-2)) = (4; -3; 1)$.

b) Đúng.

Ta có $d(A, (Oyz)) = |-1| = 1$.

c) Sai.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -3; 1)$.

Gọi $D(x_D; y_D; z_D)$. Suy ra $\overrightarrow{DC} = (-3 - x_D; -2 - y_D; 2 - z_D)$.

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 2(-3 - x_D) \\ -3 = 2(-2 - y_D) \\ 1 = 2(2 - z_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -5 \\ y_D = -\frac{1}{2} \\ z_D = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

d) Đúng.

Ta có $\frac{IB}{IC} = \frac{d(B, (Oxy))}{d(C, (Oxy))} = \frac{|z_B|}{|z_C|} = \frac{|-1|}{|2|} = \frac{1}{2}$.

Câu 8.

a) Đúng.

Hình chiếu vuông góc của điểm $B(x_B; y_B; z_B)$ lên mặt phẳng (Oxz) là $B'(x_B; 0; z_B)$.

Suy ra $B'(1; 0; -1)$.

b) Đúng.

Trọng tâm của tam giác ABC là

$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$, suy ra $G(2; -1; -1)$.

c) Sai.

Ta có $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OI}\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}.$

Suy ra $\begin{cases}x_I=\frac{1}{2}x_A+\frac{3}{2}x_B-x_C=1\\ y_I=\frac{1}{2}y_A+\frac{3}{2}y_B-y_C=-\frac{1}{2}\\ z_I=\frac{1}{2}z_A+\frac{3}{2}z_B-z_C=2\end{cases}\Rightarrow I\left(1;-\frac{1}{2};2\right).$

d) Đúng.

Ta có $S=MA^2+3MB^2-2MC^2=\overrightarrow{MA}^2+3\overrightarrow{MB}^2-2\overrightarrow{MC}^2$

$=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+3\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2-2\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IM}\right)^2$

$=IA^2+3IB^2-2IC^2+2IM^2.$

Ta có $IA^2+3IB^2-2IC^2=-\frac{3}{2}.$

Với $H(1;\,0;\,2)$ là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (Oxz), $IH=\frac{1}{2}$ và $IM\geq IH$.

Suy ra $IM\geq\frac{1}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $M\equiv H$.

Khi đó $\min S=-\frac{3}{2}+2.\left(\frac{1}{2}\right)^2=-1.$

Câu 9.

a) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{CC'}=(-1-(-1);\,3-4;\,-3-2)=(0;\,-1;\,-5).$

b) Đúng.

Do tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'}$.

Gọi $A(x_A;\,y_A;\,z_A)$. Ta có $\overrightarrow{AA'}=(-2-x_A;\,-1-y_A;\,1-z_A).$

Suy ra $\begin{cases}-2-x_A=0\\ -1-y_A=-1\\ 1-z_A=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A=-2\\ y_A=0\\ z_A=6\end{cases}\Rightarrow A(-2;\,0;\,6).$

c) Sai.

Kiến thức bổ sung: Cho ba điểm phân biệt A, B, C.

Điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thẳng hàng là $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\vec{0}$.

Nếu ba điểm A, B, C không thẳng hàng, diện tích tam giác ABC là $S=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;3;-8)$, $\overrightarrow{AC}=(1;4;-4)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(20;4;9)$.

Suy ra $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{\sqrt{497}}{2}>10$.

d) Đúng.

Kiến thức bổ sung: Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D.

Điều kiện cần và đủ để bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một mặt phẳng là $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=0$.

Nếu bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trên một mặt phẳng, thể tích tứ diện $ABCD$ là $V=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

Ta có $\overrightarrow{AA'}=(0;-1;-5)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AA'}=0-4-45=-49$.

Suy ra $V_{A'ABC}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AA'}\right|=\dfrac{49}{6}$, suy ra $V_{ABC.A'B'C'}=3V_{A'ABC}=\dfrac{49}{2}$.

Câu 10.

a) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-1;2)$; $AB=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$.

b) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-1;2)$, $\overrightarrow{AC}=(0;3;4)\Rightarrow\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

c) Sai.

Gọi $D(x_D;y_D;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-1;2)$, $\overrightarrow{CD}=(x_D+1;y_D-5;-5)$.

Do tứ giác $ABCD$ là hình thang nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ cùng phương.

Suy ra $\dfrac{x_D+1}{2}=\dfrac{y_D-5}{-1}=\dfrac{-5}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_D=-6\\ y_D=\dfrac{15}{2}\end{cases}\Rightarrow D\left(-6;\dfrac{15}{2};0\right)$.

d) Sai.

Gọi $E(x_E;y_E;z_E)$.

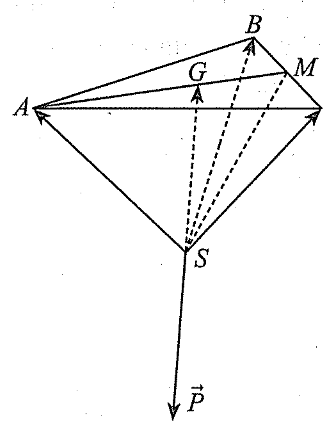
Ta có $\overrightarrow{EB}=(1-x_E;1-y_E;3-z_E)$; $\overrightarrow{EC}=(-1-x_E;5-y_E;5-z_E)$.

Do E là chân đường phân giác của góc A trong tam giác ABC nên hai vectơ $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EC}$ ngược hướng và $\dfrac{EB}{EC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{5}$, nên $\overrightarrow{EB}=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{EC}$.

Suy ra $\begin{cases} 1-x_E=-\dfrac{3}{5}(-1-x_E) \\ 1-y_E=-\dfrac{3}{5}(5-y_E) \\ 3-z_E=-\dfrac{3}{5}(5-z_E) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E=\dfrac{1}{4} \\ y_E=\dfrac{5}{2} \\ z_E=\dfrac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow E\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{2};\dfrac{15}{4}\right).$

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1.



Hình 6

Xét tứ diện đều $SABC$ có các cạnh SA, SB, SC biểu diễn độ lớn các lực căng dây và SP biểu diễn độ lớn của trọng lực tác dụng lên vật nặng S.

Ta có $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=SA, \left|\overrightarrow{F_2}\right|=SB, \left|\overrightarrow{F_3}\right|=SC, \left|\overrightarrow{P}\right|=SG$ và $\overrightarrow{SG}+\overrightarrow{SP}=\vec{0}$, trong đó G là trọng tâm của tam giác đều ABC.

Đặt $x=SA,\ x>0 \Rightarrow AC=x\sqrt{2}$.

Khi đó $AG=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{AC\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{x\sqrt{6}}{3}$.

Mặt khác $SG=SP=30$ nên xét tam giác SAG vuông tại G, ta có

$$SA^2=SG^2+AG^2 \Leftrightarrow x^2=30^2+\frac{2x^2}{3} \Leftrightarrow x=30\sqrt{3}\approx 51,96 \text{ (N)}.$$

Câu 2.

Gọi $A(-50;30;10)$, $B(2;3;0)$. Khi đó $H(-50;30;0)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxy) và góc $\widehat{ABH}$ là góc hợp bởi đường bay với mặt đất.

Khi đó $\tan\widehat{ABH}=\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{10}{\sqrt{(-52)^2+27^2}} \Rightarrow \widehat{ABH}\approx 9,69^\circ$.

Câu 3.

Điểm chính giữa của trần nhà (nơi treo móc treo của chiếc quạt trần) có toạ độ là $S(5;3,6;3,3)$.

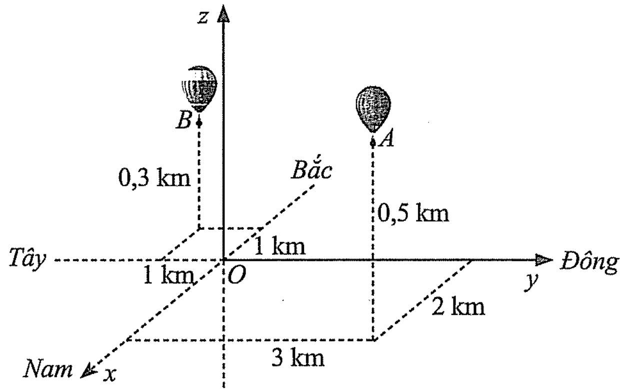
Do thanh treo động cơ của quạt có độ dài 0,8 m nên độ cao của động cơ thấp hơn điểm chính giữa trần nhà là 0,8 m. Do đó toạ độ của động cơ là $I(5;3,6;2,5)$.

Suy ra $a+b+c=5+3,6+2,5=11,1$.

Câu 4.

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng lên trời (đơn vị đo lấy theo kilômét).

Khi đó $O(0;0;0)$, $A(2;3;0,5)$, $B(-1;-1;0,3)$ lần lượt là vị trí xuất phát và vị trí của hai khinh khí cầu đối với hệ toạ độ đã chọn tại thời điểm được quan sát.



Hình 7

Gọi M là vị trí đứng của người quan sát.

Gọi $B'(-1; -1; -0,3)$ là điểm đối xứng với B qua mặt phẳng (Oxy).

Ta có $MA + MB = MA + MB'$.

Suy ra $MA + MB$ nhỏ nhất khi $MA + MB'$ nhỏ nhất, nghĩa là khi và chỉ khi A, B', M thẳng hàng.

Gọi $M(x_M; y_M; 0)$, suy ra

$\overrightarrow{MA} = (2 - x_M; 3 - y_M; 0,5)$, $\overrightarrow{MB'} = (-1 - x_M; -1 - y_M; -0,3)$.

A, B', M thẳng hàng nên $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB'}$ cùng phương

$$\Rightarrow \frac{-1 - x_M}{2 - x_M} = \frac{-1 - y_M}{3 - y_M} = \frac{-0,3}{0,5} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{1}{8} \\ y_M = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{2}; 0\right).$$

Khi đó $\min(MA + MB) = \min(MA + MB') = AB' \approx 5,1$ km.

Câu 5.

Giả sử mặt phẳng (P) cắt các tia Oy, Oz theo thứ tự tại các điểm $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $b, c > 0$.

Suy ra phương trình mặt phẳng (P): $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Do $M(1; 1; 1) \in (P)$ nên $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq 2\sqrt{\dfrac{1}{bc}} \Rightarrow bc \geq 16$.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + 4(b^2 + c^2)} \geq \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + 8bc}$.

Suy ra $S_{ABC} \geq \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + 8bc} \geq 4\sqrt{6}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b = c = 4$.

Khi đó $\min S_{ABC} = 4\sqrt{6} \approx 9,8$.

Chủ đề IV. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

A. Phương trình mặt phẳng

Câu 1. C

Mặt phẳng (P): $2x - z + 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 0; -1)$.

Câu 2. D

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(-3; 4; -2)$ và nhận $\vec{n} = (-2; 3; -4)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là

$$-2(x + 3) + 3(y - 4) - 4(z + 2) = 0 \text{ hay } 2x - 3y + 4z + 26 = 0.$$

Câu 3. A

Xét điểm $(2; 1; -6)$. Ta có $2 . 2 + 1 - 4 . (-6) - 29 = 0$. Suy ra điểm $(2; 1; -6)$ thuộc mặt phẳng đã cho.

Câu 4. A

Ta có $d(A,(\alpha)) = \dfrac{|2.1 + 2.1 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 1.$

Câu 5. A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4 - 2; 0 + 1; 1 - 3) = (2; 1; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-10 - 2; 5 + 1; 3 - 3) = (-12; 6; 0)$.

Câu 6. A

Mặt phẳng song song với mặt phẳng (Q) có dạng $2x - 3y + z + d = 0$ $(d \neq 5)$.

Mặt phẳng này đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ nên $2 . 1 - 3 . (-2) + 3 + d = 0 \Rightarrow d = -11$.

Vậy mặt phẳng cần tìm có phương trình là $2x - 3y + z - 11 = 0$.

Câu 7. A

Mặt phẳng (P): $4x - 14y - z + 4 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (4; -14; -1)$.

Mặt phẳng $3x + y - 2z + 15 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (3; 1; -2)$.

Ta có $\vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$ nên hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Câu 8. A

Phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn là $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-3} + \dfrac{z}{4} = 1$ hay $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 1.$

Câu 9. C

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; -3; 2)$.

Mặt phẳng (Q) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{n}_P$ và $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; 2)$ nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q = (0; 2; 3)$.

Câu 10. D

Hai mặt phẳng (Q) và (R) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_Q = (1; 1; 3)$ và $\vec{n}_R = (2; -1; 1)$.

Mặt phẳng (P) đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (Q) và (R) nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P = (4; 5; -3)$.

Mặt phẳng (P) có phương trình là

$$4(x-2) + 5(y-1) - 3(z+3) = 0 \text{ hay } 4x + 5y - 3z - 22 = 0.$$

Câu 11. C

Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{1} = 1$ hay $2x - y + 2z - 2 = 0$.

Suy ra $d(O,(ABC)) = \frac{|2.0 - 0 + 2.0 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}$.

Câu 12. A

Mặt phẳng (ABC) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (0; -2; 4)$ nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0; -4; -2)$.

B. Phương trình đường thẳng trong không gian

Câu 13. B

Đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; -1)$.

Câu 14. B

Thay lần lượt toạ độ của các điểm M, N, P, Q vào phương trình của đường thẳng Δ, ta thấy toạ độ của điểm N thoả mãn nên điểm N thuộc đường thẳng Δ.

Câu 15. D

Hai đường thẳng d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (1; -1; 0)$ và $\vec{a}' = (1; -1; -2)$.

Ta có $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương nên d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

Đường thẳng d' có phương trình tham số là $d' : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 - t' \\ z = -2 - 2t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2 + t = 1 + t' \\ 1 - t = 2 - t' \\ 1 = -2 - 2t' \end{cases}$ ta được $t = -\frac{5}{2}$, $t' = -\frac{3}{2}$.

Vậy d cắt d'.

Câu 16. B

Đường thẳng đi qua A và nhận $\overrightarrow{AB} = (0;\ 0;\ -1)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình là $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -1 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Câu 17. C

Hai mặt phẳng (α) và (β) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (2; 2; 1)$ và $\vec{n}' = (1; 0; 1)$.

Suy ra $\cos((\alpha), (\beta)) = \dfrac{|2.1 + 2.0 + 1.1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}.\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $((\alpha), (\beta)) = 45^\circ$.

Câu 18. A

Thay toạ độ điểm M vào phương trình đường thẳng Δ, ta có $-1 = \dfrac{3}{m-1}$. Suy ra $m = -2$.

Câu 19. C

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2;\ 1;\ 4)$, mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -2; 1)$.

Suy ra $\sin(d, (P)) = \dfrac{|2.3 + 1.(-2) + 4.1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}\ .\ \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{21}$.

Câu 20. C

Hai đường thẳng d và Δ có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}_1 = (2; 2; 1)$ và $\vec{a}_2 = (1; 0; 1)$.

Suy ra $\cos(d, \Delta) = \dfrac{|2.1 + 2.0 + 1.1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}.\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $(d, \Delta) = 45^\circ$.

Câu 21. B

Đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1;\ 1;\ 0)$ và $B(3;\ 2;\ -1)$ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (4; 1; -1)$.

Câu 22. B

Đường thẳng đi qua $A(3;\ 2;\ -1)$ và vuông góc với mặt phẳng (α): $x - 2y + z - 1 = 0$ có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1; -2; 1)$ nên có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$.

Câu 23. B

Đường thẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (-1; 3; -2) = -(1; -3; 2)$ nên có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{2}$.

Câu 24. A

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1; -2; 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; -1)$ là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

C. Phương trình mặt cầu

Câu 25. A

Ta có $AB = 2\sqrt{5}$.

Mặt cầu đường kính AB có tâm là $I(2; -2; 0)$ và bán kính $R = \frac{1}{2}AB = \sqrt{5}$ nên có phương trình là $(x-2)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5$.

Câu 26. A

Mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình là

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Câu 27. B

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 1 = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$ nên tâm của mặt cầu là $I(1; 0; -1)$

Câu 28. A

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z + 3 = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$, $d = 3$.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + 1 + 4 - 3 = 3 > 0$. Suy ra phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

Câu 29. A

Mặt cầu tâm $I(0; -3; 1)$, bán kính $R = 2$ có phương trình là

$$x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 4.$$

Câu 30. A

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình của một mặt cầu khi và chỉ khi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Câu 31. A

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$, $d = -11$.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + 4 + 9 + 11 = 25 > 0$. Suy ra phương trình đã cho là phương trình mặt cầu tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = 5$.

Câu 32. A

Ta tính được $IC = 3$ nên C thuộc mặt cầu đã cho.

Câu 33. C

Mặt cầu (S): $x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 4$ có tâm $I(0; -3; 1)$ và bán kính $R = 2$.

Câu 34. A

Gọi $I(a; 0; 0)$ là tâm mặt cầu (S).

Ta có $IA = IB \Leftrightarrow (a-1)^2 + 4 + 9 = (a-4)^2 + 36 + 4 \Leftrightarrow a = 7$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(7; 0; 0)$, bán kính $IA = 7$ nên có phương trình là $(x-7)^2 + y^2 + z^2 = 49$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

A. Phương trình mặt phẳng

Câu 1.

a) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (0; -1; 1)$, $\overrightarrow{BD} = (-2; 0; -1)$. Mặt phẳng (BCD) đi qua $B(0; 1; 0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -2; -2)$ nên có phương trình là $x - 2(y-1) - 2z = 0$ hay $x - 2y - 2z + 2 = 0$.

b) Sai.

Viết phương trình mặt phẳng (ACD) rồi thay toạ độ điểm B vào phương trình mặt phẳng (ACD), ta thấy điểm B không thuộc mặt phẳng (ACD).

c) Sai.

Độ dài đường cao của hình chóp $A.BCD$ bằng $d(A, (BCD)) = 1$.

d) Sai.

Mặt phẳng (ACD) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (-3; 1; -1)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n_1} = (-1; -4; -1)$.

Mặt phẳng (BCD) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BC} = (0; -1; 1)$, $\overrightarrow{BD} = (-2; 0; -1)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n_2} = (1; -2; -2)$.

Mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với hai mặt phẳng (ACD), (BCD) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{n_1}$ và $\vec{n_2}$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (6; -3; 6)$. Ta viết được phương trình mặt phẳng đó là $2x - y + 2z - 2 = 0$.

Câu 2.

a) Đúng.

Mặt phẳng $(A'B'C'D')$ đi qua $C'(4; 5; -5)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (0; -1; 0)$ làm cặp vectơ chỉ phương nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 0; -1)$. Suy ra phương trình tổng quát của mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là $x - z - 9 = 0$.

b) Sai.

Ta tìm được $B'(4; 6; -5)$ và $D'(3; 4; -6)$ và mặt phẳng $(AB'D')$ có phương trình tổng quát là $2x - y - 2 = 0$.

c) Sai.

Chiều cao của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'B'C'D')$, bằng $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

d) Đúng.

Mặt phẳng $(ABC'D')$ có phương trình là $11x - 9y - 2z - 9 = 0$.

Chiều cao của hình chóp $C.ABC'D'$ là khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(ABC'D')$, bằng $\dfrac{9}{\sqrt{206}}$.

Câu 3.

a) Sai.

Thay toạ độ điểm A vào phương trình mặt phẳng (α), ta có $2 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2 = 3 \neq 0$ nên điểm A không thuộc mặt phẳng (α).

b) Sai.

Hai mặt phẳng (α), (β) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (1; 2; -3)$ và $\vec{n}_2 = (1; 0; 2)$.

Ta có $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương nên (α) cắt (β).

c) Đúng.

Mặt phẳng (γ) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_3 = (4; -3; -2)$.

Ta có $\vec{n}_2 . \vec{n}_3 = 0$, suy ra mặt phẳng (β) vuông góc với mặt phẳng (γ).

d) Đúng.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với hai mặt phẳng (α), (γ) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{n}_1 = (1; 2; -3)$ và $\vec{n}_3 = (4; -3; -2)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-13; -10; -11)$.

Mặt phẳng (P) có phương trình là

$$-13(x-2) - 10(y-1) - 11(z-1) = 0 \text{ hay } 13x + 10y + 11z - 47 = 0.$$

Câu 4.

a) Sai.

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{3}{\sqrt{14}}$.

b) Sai.

Hai mặt phẳng (P), (Q) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (2; -1; 3)$ và $\vec{n}_2 = (4; -2; 6)$.

Ta có $\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1$ và $-1 \neq 2 \cdot 4$, suy ra mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

c) Đúng.

Lấy điểm $B(-2; 0; 0)$ thuộc mặt phẳng (P). Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (Q).

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\frac{9\sqrt{56}}{56}$.

d) Sai.

Mặt phẳng qua điểm M và song song với mặt phẳng (P) nhận $\vec{n_1} = (2; -1; 3)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình tổng quát là

$2(x-1) - (y-3) + 3(z+2) = 0$ hay $2x - y + 3z + 7 = 0$.

B. Phương trình đường thẳng trong không gian

Câu 5.

a) Sai.

Mặt phẳng (BCD) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BC} = (0; -1; 1)$, $\overrightarrow{BD} = (-2; 0; -1)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -2; -2)$.

Đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có vectơ chỉ phương là $\vec{n} = (1; -2; -2)$.

b) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{CD} = (-2; 1; -2)$.

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (AB, CD) = 45^\circ.$$

c) Đúng.

Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0$.

$$\cos((ABC),(BCD)) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow ((ABC),(BCD)) \approx 55^\circ.$$

d) Đúng.

Ta có $AH: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = -2t \end{cases}$, $(BCD): x - 2y - 2z + 2 = 0$.

Suy ra $H\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Câu 6.

a) Đúng.

Ta có $A \notin (P)$, $B \in (P)$ nên đường thẳng AB và mặt phẳng (P) cắt nhau tại B.

b) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; -9)$ nên đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1; 1; 9)$.

c) Đúng.

Ta có $\sin(AB, (P)) = \sqrt{\frac{21}{83}}$.

Vậy góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P) (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) là 30°.

d) Đúng.

Đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) nhận $\vec{u} = (4; -1; 2)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$.

Câu 7.

a) Sai.

Ta có I là trung điểm AC nên $I(2; -1; 4)$.

Đường thẳng đi qua B và I có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BI} = (2; -2; 5)$.

b) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (3; -3; 6)$ nên đường thẳng BC có một vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1; -1; 2)$.

c) Sai.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -2; 2)$.

$\cos A = \frac{-2-2-8}{\sqrt{18}.\sqrt{12}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$. Suy ra góc A của tam giác ABC tù, mà góc giữa hai đường thẳng AB và AC nhọn.

d) Đúng.

Ta có $H \in BC \Rightarrow H(t; 1-t; -1+2t)$.

$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow t = \frac{5}{3}$. Vậy $H\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Câu 8.

a) Đúng.

Hai đường thẳng d và Δ có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}_1 = (1; -1; -1)$ và $\vec{a}_2 = (1; 0; 1)$.

Ta có $\vec{a}_1 . \vec{a}_2 = 0$ nên hai đường thẳng d và Δ vuông góc với nhau.

b) Đúng.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 1 - t' \\ z = 2 - t' \end{cases}$ $(t' \in \mathbb{R})$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} t = 2 + t' \\ 3 = 1 - t' \\ -2 + t = 2 - t'. \end{cases}$

Hệ trên vô nghiệm nên hai đường thẳng d và Δ chéo nhau.

c) Đúng.

Hai đường thẳng d và Δ vuông góc với nhau nên góc giữa hai đường thẳng d và Δ là 90°.

d) Đúng.

Mặt phẳng chứa d và song song với Δ có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}_1 = (1; -1; -1)$ và $\vec{a}_2 = (1; 0; 1)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;\ 2;\ -1)$.

C. Phương trình mặt cầu

Câu 9.

a) Sai.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;\ 0;\ 1)$.

b) Đúng.

c) Sai.

Gọi $B(0;\ 0;\ c)$ với $c > 0$ là điểm trên tia Oz.

B thuộc mặt cầu (S) nên thay toạ độ của B vào phương trình mặt cầu (S), ta suy ra $B(0;\ 0;\ 4)$.

d) Đúng.

Đường thẳng đi qua hai điểm I, B có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{IB} = (2;\ 0;\ 3)$ nên có phương trình

là $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

Câu 10.

a) Sai.

Toạ độ của đỉnh $B(3;\ 0;\ 0)$.

b) Đúng.

c) Đúng.

d) Đúng.

Ta có $IB = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Phương trình mặt cầu tâm I, bán kính IB là $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + (x-2)^2 = \dfrac{25}{2}$.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

A. Phương trình mặt phẳng

Câu 1. Gọi $A(m; 0; 0)$, $B(0; m; 0)$, $C(0; 0; m)$ với $m > 0$ là giao điểm của mặt phẳng (α) và các tia Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua A, B, C là: $\frac{x}{m}+\frac{y}{m}+\frac{z}{m}=1.$

Mặt phẳng (α) qua điểm $M(5; 4; 3)$, suy ra $m = 12$.

Ta có $\frac{x}{12}+\frac{y}{12}+\frac{z}{12}=1 \Leftrightarrow x+y+z-12=0$. Suy ra $c = -12$.

Câu 2. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; 1; 0\right)$.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(0; -2; -2)$, $\overrightarrow{BD}=(-1; -1; -1)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(0; 1; -1)$ nên có phương trình là

$0.\left(x-\frac{1}{3}\right)+1.(y-1)-1.(z-0)=0$ hay (P): $y-z-1=0$.

Suy ra $a - m = 1$.

Câu 3. I là trung điểm $AB \Rightarrow I(1; 1; 1)$.

M là hình chiếu của I trên mặt phẳng $(P) \Rightarrow M(0; 3; -1)$. Suy ra $a + b + c = 2$.

Câu 4. $C(-8; 0; 0)$, $D(0; -8; 0)$, $D'(0; -6; 3)$.

$(CDD'C')$: $3x + 3y - 2z + 24 = 0$. Suy ra $m = 12$.

Câu 5. $E(0; 0; 7)$, $F(10; 0; 7)$, $I(10; 12; 9)$.

$(EFIK)$: $y - 6z + 42 = 0$. Suy ra $a - bc = 252$.

Câu 6. $(ABCD)$: $y + 8z + 520 = 0$. Suy ra $a = 8$.

B. Phương trình đường thẳng trong không gian

Câu 7. Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x=2-t' \\ y=-1+3t' \\ z=1+t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$.

$B(a; b; c) \in (P) \Rightarrow t' = 1 \Rightarrow B(1; 2; 2)$.

Vậy $2a + b^2 + c^2 = 10$.

Câu 8.

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc toạ độ O trùng với D và $A(3; 0; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $D'(0; 0; 1)$, $B(3; 2; 0)$.

Phương trình đường thẳng $AD: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

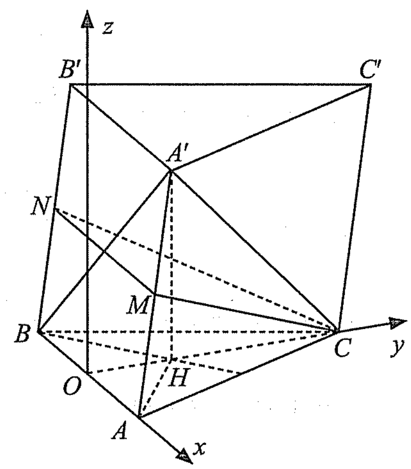
Phương trình đường thẳng $BD':\begin{cases}x=3t'\\y=2t'\\z=1-t'\end{cases}\quad(t'\in\mathbb{R})$

$M\in AD\Rightarrow M(t;\,0;\,0);\ N\in BD'\Rightarrow N(3t';\,2t';\,1-t');\ \overrightarrow{MN}=(3t'-t;2t';1-t')$.

MN ngắn nhất khi và chỉ khi $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD}=0\\\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD'}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3t'-t=0\\14t'-3t=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{3}{5}\\t'=\dfrac{1}{5}.\end{cases}$

Vậy $MN=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\approx 0,89$ (m).

Câu 9. Gọi O là trung điểm của AB.



Hình 1

Chọn hệ trục toạ độ sao cho $O(0;\,0;\,0)$,

$A\left(\dfrac{1}{2};\,0;\,0\right)$, $B\left(-\dfrac{1}{2};\,0;\,0\right)$, $C\left(0;\,\dfrac{\sqrt{3}}{2};\,0\right)$,

$H\left(0;\,\dfrac{\sqrt{3}}{6};\,0\right)$, $A'H=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow A'\left(0;\,\dfrac{\sqrt{3}}{6};\,\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}\Rightarrow B'\left(-1;\dfrac{\sqrt{3}}{6};\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Dễ thấy (ABC) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1=(0;\,0;\,1)$.

M là trung điểm $AA'\Rightarrow M\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{\sqrt{3}}{12};\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$,

N là trung điểm $BB'\Rightarrow N\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{\sqrt{3}}{12};\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

$\overrightarrow{MN}=(-1;\,0;\,0)$, $\overrightarrow{CM}=\left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{5\sqrt{3}}{12};\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$

$\Rightarrow(CMN)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2=\left(0;\dfrac{\sqrt{6}}{6};\dfrac{5\sqrt{3}}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{12}(0;\,2\sqrt{2};\,5)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN), ta có

$\cos\varphi=\dfrac{5}{\sqrt{33}}\Rightarrow\tan\varphi=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\varphi}-1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\approx 0,57.$

Câu 10.

Gọi I hình chiếu của M lên $(ABCD)$, suy ra I là trung điểm của AO.

Khi đó $CI=\dfrac{3}{4}AC=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Xét ΔCNI có: $CN=\dfrac{a}{2}$, $\widehat{NCI}=45^\circ$.

Áp dụng định lí côsin, ta có:

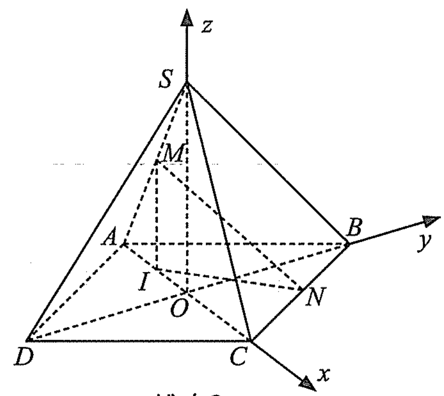
$$NI = \sqrt{CN^2 + CI^2 - 2CN.CI.\cos 45^\circ}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{8} - 2.\frac{a}{2}.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Xét ΔMIN vuông tại I nên

$$MI = \sqrt{MN^2 - NI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2} - \frac{5a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

Mà $MI \,//\, SO$, $MI = \frac{1}{2}SO \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$



Hình 2

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ như Hình 2.

Ta có: $O(0; 0; 0)$, $B\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $D\left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $N\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right)$,

$A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$, $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{\sqrt{14}}{4}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$, $\overrightarrow{SB} = \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SD} = \left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBD): $\vec{n} = \overrightarrow{SB} \wedge \overrightarrow{SD} = (-\sqrt{7}; 0; 0)$.

Suy ra $\sin(MN, (SBD)) = \dfrac{|\overrightarrow{MN}.\vec{n}|}{|\overrightarrow{MN}|.|\vec{n}|} = \dfrac{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}.(-\sqrt{7})\right|}{\frac{\sqrt{6}}{2}.\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58.$

Câu 11.

Ta có $B(60; 0; 0)$, $A(0; 60\sqrt{3}; 0)$, $S(0; 20\sqrt{3}; 110)$,

$\overrightarrow{SB} = (60; -20\sqrt{3}; -110)$, $\overrightarrow{AB} = (60; -60\sqrt{3}; 0)$.

Mặt phẳng (SAB) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (11\sqrt{3}; 11; 4\sqrt{3})$.

Tương tự, mặt phẳng (SAC) có vectơ pháp tuyến $\vec{m} = (11\sqrt{3}; -11; -4\sqrt{3})$.

Suy ra $|\cos(\vec{n}, \vec{m})| = \frac{97}{266} \approx 0,36.$

Câu 12.

$AI = \sqrt{3^2 - 2,2^2} \approx 2$ (m).

$A(3; 0; 0)$, $I(5; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $E(3; 2; 1,7)$, $F(3; 0; 2,2)$, $C(0; 0; 2,2)$.

$\overrightarrow{IF} = (-2; 0; 2,2)$, $\overrightarrow{EF} = (0; -2; 0,5)$, $\overrightarrow{EC} = (-3; -2; 0,5)$.

$(CDEF)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0; 1; 4)$.

$$\sin(IF,(CDEF)) = \frac{8,8}{\frac{17\sqrt{13}}{5}} = \frac{44}{17\sqrt{13}} \Rightarrow (IF,(CDEF)) \approx 46^\circ.$$

Suy ra $a = 46$.

C. Phương trình mặt cầu

Câu 13. Phương trình mặt cầu là (S): $(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = a^2$.

Gọi $M(x; y; z) \in (S)$ sao cho $d(M, (Oxy)) = 1$, $d(M, (Oyz)) = 2$, $d(M, (Oxz)) = 3$

$$\Rightarrow M(2; 3; 1) \in (S) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3+\sqrt{2} = r_1 \\ a = 3-\sqrt{2} = r_2. \end{array}\right.$$

Suy ra $2r_1 + 2r_2 = 12$.

Câu 14. Mặt cầu có tâm là $I(4; 4; 4)$, bán kính $R = 3$ nên có phương trình là

$(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 9$ hay $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 8z + 39 = 0$.

Suy ra $a + b + c + d = 51$.

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. D

Sắp xếp mẫu số liệu đã cho theo thứ tự không giảm, ta được.

20	25	25	25	25	25	30	30	30	30

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là 30 – 20 = 10 (mA).

Câu 2. C

Giá trị 25 xuất hiện nhiều lần nhất (5 lần) nên mốt của mẫu số liệu trên là 25.

Câu 3. B

Trung vị của mẫu số liệu trên là $\frac{25+25}{2}=25$.

Câu 4. A

Do $Q_1 = 25$, $Q_3 = 30$ nên khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là $\Delta_Q = 30 - 25 = 5$.

Câu 5. B

Phương sai của mẫu số liệu trên là $S^2 = 10{,}25$.

Câu 6. C

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là $R = 2{,}1 - 1{,}5 = 0{,}6$ (kg).

Câu 7. A

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên là $Q_1 = \frac{1,60+1,65}{2} = 1,625$.

Câu 8. D

Hai giá trị 1,50 và 2,10 cùng xuất hiện nhiều lần nhất (3 lần) nên mốt của mẫu số liệu trên là 1,50 và 2,10.

Câu 9. A

Ta có $Q_1 = 1{,}625$ và $Q_3 = \frac{2,00+2,05}{2} = 2,025$ nên khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là $\Delta_Q = 2{,}025 - 1{,}625 = 0{,}4$.

Câu 10. A

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là $S \approx 0{,}212 \in [0{,}2; 0{,}3)$.

Câu 11. B

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $R = 60 - 50 = 10$ (km/h).

Câu 12. A

Ta có $\frac{n}{4} = \frac{125}{4} = 31,25 < 40$. Do đó, nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm trên là [50; 52).

Câu 13. C

Nhóm chứa mốt là nhóm [50; 52) nên mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

$$M_o = 50 + \frac{40-0}{(40-0)+(40-32)} \cdot (52-50) = \frac{155}{3}.$$

Câu 14. C

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm trên thuộc nhóm [54; 56). Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 54 + \frac{\frac{3.125}{4} - (40+32)}{25}(56-54) = 55,74.$$

Câu 15. D

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $S \approx 2{,}516$.

Câu 16. C

Nhóm [16; 18) có tần số cao nhất là 10 nên nó là nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm.

Câu 17. B

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên thuộc nhóm [16; 18). Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_2 = 16 + \frac{\frac{30}{2} - (4+8)}{10} \cdot (18-16) = 16,6.$$

Câu 18. A

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm thuộc nhóm [14; 16). Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $Q_1 = 14 + \dfrac{\frac{30}{4} - 4}{8} \cdot (16-14) = 14,875.$

Câu 19. B

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $\overline{x} = 16,6.$

Câu 20. D

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần nghìn) là 4,907.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1.

a) Đúng.

Cỡ mẫu của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $n = 12 + 25 + 38 + 20 + 5 = 100$.

b) Đúng.

Giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu là 1750, giá trị lớn nhất của mẫu số liệu là 1850 nên khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 1\,850 - 1\,750 = 100$ (gam).

c) Sai.

Gọi $x_1, x_2, ..., x_{100}$ là mẫu số liệu gốc gồm cân nặng của 100 quả dứa được sắp xếp theo thứ tự không giảm.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{75}+x_{76})$. Do $x_{75} \in [1\,790;\ 1\,810)$ và $x_{76} \in [1\,810;\ 1\,830)$ nên tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 1810$.

d) Đúng.

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là [1 770; 1 790). Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 1770 + \frac{\frac{100}{4} - 12}{25}.20 = 1780,4.$$

Do đó, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 1\,810 - 1\,780,4 = 29,6.$$

Câu 2.

a) Sai.

Cỡ mẫu của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $n = 2 + 16 + 20 + 2 = 40$.

b) Đúng.

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là [5,0; 5,5) có tần số là 16 nên tần số tương đối là $f = \frac{16}{40} = 40\%$.

c) Sai.

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là [5,0; 5,5). Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 5,0 + \frac{\frac{40}{4} - 2}{16}.0,5 = 5,25.$$

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là [5,5; 6,0). Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 5,5 + \frac{\frac{3.40}{4} - 2 - 16}{20}.0,5 = 5,8.$$

Từ đó, khoảng tứ phân vị là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 5,8 - 5,25 = 0,55$.

d) Sai.

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $S^2 \approx 0,112 \notin (0;\ 0,1)$.

Câu 3.

a) Đúng.

Giá trị nhỏ nhất trong mẫu số liệu là 3,5; giá trị lớn nhất trong mẫu số liệu là 7,5.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 7,5 - 3,5 = 4$ (cm).

b) Đúng.

Cỡ mẫu là $n = 5 + 18 + 20 + 7 = 50$. Nhóm chứa mốt là [5,5; 6,5) có tần số 20 nên có tần số tương đối là $f = \frac{20}{50} = 40\%$.

c) Sai.

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là [4,5; 5,5). Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 4,5 + \frac{\frac{50}{4} - 5}{18}.1 = \frac{59}{12}.$$

Khoảng chứa tứ phân vị thứ ba là [5,5; 6,5). Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 5,5 + \frac{\frac{3.50}{4} - 5 - 18}{20}.1 = 6,225.$$

Suy ra khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 6,225 - \frac{59}{12} \approx 1,308$.

d) Đúng.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là $S \approx 0,85 \in (0,5; 1)$.

Câu 4.

a) Đúng.

Số chuyến xe mà bác tài xế đã thống kê chính là cỡ mẫu của mẫu số liệu. Ta có

$$n = 40 + 20 + 15 + 10 = 85.$$

b) Đúng.

Tần số tích luỹ của nhóm [2; 4) và nhóm [4; 6) lần lượt là 60; 75.

Vì $60 < 85.\frac{3}{4} = 63,75 < 75$ nên tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm thuộc nhóm [4; 6).

c) Sai.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 4 + \frac{\frac{3.85}{4} - (40+20)}{15} \cdot 2 = 4,5.$$

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là [0; 2). Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 0 + \frac{\frac{85}{4} - 0}{40} \cdot 2 = 1,0625.$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 3,4375$.

Chú ý: 8 km là khoảng biến thiên của mẫu số liệu.

d) Sai.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là $S \approx 2,111 \notin (1; 2)$.

Câu 5.

a) Sai.

Khoảng biến thiên thời gian chạy của Hoa là $R = 24,2 - 23,7 = 0,5$ (giây).

Khoảng biến thiên thời gian chạy của Mai là $R = 24 - 23,7 = 0,3$ (giây).

b) Đúng.

Thành tích trung bình của Hoa là $\overline{x} \approx 23,8789 < 23,9$.

c) Sai.

Thành tích trung bình của Mai là 23,802 giây nhỏ hơn thành tích trung bình của Hoa.

Vậy thành tích trung bình của Mai tốt hơn Hoa.

d) Đúng.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu về thời gian chạy của Mai là $S = 0,064$.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu về thời gian chạy của Hoa là $S \approx 0,125$.

Do độ lệch chuẩn của Mai thấp hơn của Hoa nên Mai có thành tích ổn định hơn Hoa.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. $Q_1 = 15$; $Q_3 = 22,5$; $\Delta_Q = 7,5$.

Câu 2. $Q_1 = 25,3$; $Q_3 = 25,5$; $\Delta_Q = 0,2$.

Câu 3. $\overline{x} \approx 9,186; S^2 \approx 4,908; S \approx 2,215; \dfrac{\overline{x}}{S} \approx \dfrac{9,186}{2,215} \approx 4,147$.

Câu 4. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc $S \approx 12,72$.

Lượng điện (kWh)	[250; 260)	[260; 270)	[270; 280)	[280; 290)
Số hộ gia đình	3	2	3	2

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm $S \approx 11,14$.

Hiệu của độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc khoảng $11,14 - 12,72 = -1,58$.

Câu 5. Tứ phân vị thứ nhất và thứ ba của mẫu số liệu gốc là $Q_1 = 90,3$; $Q_3 = 96,75$.

Suy ra $\Delta_Q = 6,45$.

Giá đóng cửa cổ phiếu	[88,5; 91)	[91; 93,5)	[93,5; 96)	[96; 98,5)
Số ngày	3	1	3	5

Tứ phân vị thứ nhất và thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = 91$; $Q_3 = 97$. Suy ra $\Delta_Q = 6$.

Hiệu của khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc là $6 - 6,45 = -0,45$.

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

A. Xác suất cổ điển

Câu 1. D

Xác suất để 3 viên bi được lấy ra có cùng màu là $\dfrac{C_6^3}{C_8^3}=\dfrac{5}{14}$.

Câu 2. B

Xác suất của biến cố "Tổng số chấm xuất hiện là số chẵn" là $\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 3. B

Các kết quả có thể xảy ra để tích các số trên 2 tấm thẻ bằng 6 là (1; 6); (2; 3).

Do đó xác suất cần tìm là $\dfrac{2}{C_6^2}=\dfrac{2}{15}$.

Câu 4. C

Các kết quả có thể xảy ra để tổng các số trên 2 tấm thẻ bằng 12 là (2; 10); (3; 9); (4; 8); (5; 7); (7; 5), (8; 4), (9; 3), (10; 2).

Do đó xác suất cần tìm là $\dfrac{8}{10.9}=\dfrac{4}{45}$.

Câu 5. A

$P(A\cap B)=0$ suy ra $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0{,}2+0{,}1=0{,}3$.

Câu 6. C

$P(A\overline{B})=0{,}5.(1-0{,}4)=0{,}3$.

Câu 7. A

Do mỗi người thi độc lập với nhau nên xác suất cả hai người cùng thi đạt là $0{,}6\,.\,0{,}3=0{,}18$.

Câu 8. A

Gọi $(x; y)$ là kết quả Ân đứng ở vị trí x, Châu đứng ở vị trí y.

Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố "Ân và Châu đứng cạnh nhau" là $\{(1; 2); (2; 1); (2; 3); (3; 2); (3; 4); (4; 3)\}$.

Do đó xác suất cần tìm là $\dfrac{6}{4!}=0{,}25$.

Câu 9. D

Số học sinh giỏi ít nhất một trong hai môn Lịch sử hoặc Địa lí là 11 + 17 – 8 = 20.

Do đó xác suất cần tìm là $\dfrac{1}{2}$.

Câu 10. B

Xác suất để có 2 học sinh khối 10 trong 3 học sinh được chọn là $\dfrac{11.C_4^2}{C_{15}^3}=\dfrac{66}{455}$.

Xác suất để có 3 học sinh khối 10 trong 3 học sinh được chọn là $\dfrac{C_4^3}{C_{15}^3}=\dfrac{4}{455}$.

Do đó xác suất cần tìm là $\dfrac{2}{13}$.

B. Xác suất có điều kiện

Câu 11. C

$$P(\overline{B}|A)=1-\frac{P(BA)}{P(A)}=0,4.$$

Câu 12. A

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{B})-P(A\overline{B})=P(\overline{B})-[P(A)-P(AB)]=1-P(B)-P(A)+P(AB)=0,2.$$

$$P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{1-P(B)}=\frac{2}{5}.$$

Câu 13. D

$$P(AB)=P(B)\,P(A\mid B)=0,6\,.\,0,5=0,3.$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,3+0,6-0,3=0,6.$$

Câu 14. B

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\dfrac{P(AB)}{P(B\mid A)}}{\dfrac{P(AB)}{P(A\mid B)}}=\frac{P(A\mid B)}{P(B\mid A)}=4.$$

Câu 15. C

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0,3+0,6-0,7=0,2.$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0,2}{0,6}=\frac{1}{3}.$$

Câu 16. D

Gọi V là biến cố "Viên bi lấy ra có màu vàng", $Đ$ là biến cố "Viên bi lấy ra có màu đỏ", X là biến cố "Viên bi lấy ra có màu xanh".

Ta có $P(\overline{V}\mid\overline{Đ})=\dfrac{P(X)}{P(\overline{Đ})}=\dfrac{4}{5}$.

Câu 17. C

$$\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{3}.$$

Câu 18. C

Gọi A là biến cố "Hai viên bi lấy ra có cùng màu", V là biến cố "Hai viên bi lấy ra đều có màu vàng".

Ta có $P(V|A)=\dfrac{P(AV)}{P(A)}=\dfrac{\dfrac{1}{C_7^2}}{\dfrac{1+C_4^2}{C_7^2}}=\dfrac{1}{7}$.

Câu 19. A

Gọi A là biến cố "Viên bi được chọn từ hộp thứ nhất có màu xanh", B là biến cố "Viên bi được chọn từ hộp thứ hai có màu xanh".

Ta có: $P(A)=\dfrac{3}{8};P(B\mid A)=\dfrac{5}{10}$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(AB)=P(A).P(B\mid A)=\dfrac{3}{8}.\dfrac{5}{10}=\dfrac{3}{16}$.

Câu 20. D

Gọi A là biến cố "Nhân viên của doanh nghiệp là nữ", B là biến cố "Nhân viên của doanh nghiệp có bằng đại học".

$P(AB)=0{,}45\ .\ 0{,}3=0{,}135;\ P(\overline{A}B)=0{,}55\ .\ 0{,}25=0{,}1375$.

Suy ra $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=\dfrac{109}{400}$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

A. Xác suất cổ điển

Câu 1.

a) Sai.

Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp có 10 viên bi nên số phần tử của không gian mẫu là $C_{10}^2=45$.

b) Đúng.

Do các viên bi là cùng kích thước và khối lượng nên mỗi viên bi đều có cùng khả năng được chọn. Do số viên bi đỏ bằng số viên bi xanh nên khả năng chọn được 1 viên bi đỏ và khả năng chọn được 1 viên bi xanh là như nhau.

c) Sai

Gọi $\overline{A}$ là biến cố " Không có viên bi đỏ nào trong 2 viên được chọn". Xác suất của biến cố A là $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{C_5^2}{C_{10}^2}=\dfrac{7}{9}$.

d) Sai.

$A\cap B$ là biến cố "Có cả bi xanh và bi đỏ trong 2 viên được chọn". Ta có $P(A\cap B)=\dfrac{5.5}{C_{10}^2}=\dfrac{5}{9}$.

Vì A, B là hai biến cố đồng khả năng nên $P(A) = P(B) = \frac{7}{9}$.

Do $P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$ nên hai biến cố A và B không phải là hai biến cố độc lập.

Câu 2.

a) Sai.

$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) = 0,3 + 0,3 = 0,6$

b) Đúng.

$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = 0,3 + 0,2 = 0,5$

c) Đúng.

Do $P(A).P(B) = 0,6.0,5 = 0,3 = P(AB)$ nên A và B là hai biến cố độc lập.

d) Sai.

Ta có $P(\overline{A}\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$.

Suy ra $P(\overline{A}\overline{B}) = 0,2$.

Câu 3.

a) Đúng.

Số phần tử của không gian mẫu là $C_{10}^5 = 252$.

b) Đúng.

Xác suất của biến cố "Có đúng 1 bạn nam trong 5 bạn được chọn" là $\frac{4.C_6^4}{252} = \frac{5}{21}$.

c) Sai.

Xác suất của biến cố "Không có bạn nam nào trong 5 bạn được chọn" là $\frac{C_6^5}{252} = \frac{1}{42}$.

Xác suất của biến cố "Có ít nhất 1 bạn nam trong 5 bạn được chọn" là $1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42}$.

d) Đúng.

$P(A_k) = \frac{C_4^k.C_6^{5-k}}{252}$ với $0 \leq k \leq 4$. Xác suất $P(A_k)$ đạt giá trị lớn nhất khi $k = 2$.

Câu 4.

a) Đúng.

Số cách lấy ra 2 tấm thẻ từ một hộp có 14 tấm thẻ là $C_{14}^2 = 91$.

b) Sai.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{C_{10}^2 + C_4^2}{91} = \frac{51}{91}$.

c) Đúng.

Xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{C_7^2}{91} = \frac{3}{13}$.

d) Sai.

Xác suất của biến cố "Hai thẻ lấy ra cùng màu và cùng ghi số lẻ" là

$$P(A\cap B)=\frac{C_2^2+C_5^2}{91}=\frac{11}{91}\neq\frac{51}{91}.\frac{3}{13}=P(A).P(B).$$

Do đó A và B không phải là hai biến cố độc lập.

Câu 5.

a) Sai.

Bỏ 6 viên bi khác nhau vào 3 hộp đánh số 1; 2; 3 khác nhau, khi đó mỗi viên bi có thể được cho vào một trong ba hộp. Số phần tử của không gian mẫu là $3^6=729$.

b) Đúng.

Hộp số 1 không chứa viên bi nào nên 6 viên bi được cho vào hộp số 2 và hộp số 3. Số cách xếp bi là $2^6=64$.

c) Sai.

Số cách xếp bi sao cho hộp số 1 không chứa viên bi nào và hộp số 2 hoặc hộp số 3 không chứa viên bi nào là 2.

Vậy số cách xếp bi sao cho chỉ có hộp số 1 không chứa viên bi nào là $64-2=62$.

d) Sai.

Số cách xếp bi để không có hộp nào bị trống là $729-3-3\,.\,62=540$.

Xác suất để không có hộp nào bị trống là $\frac{540}{729}=\frac{20}{27}$.

B. Xác suất có điều kiện

Câu 6.

a) Sai.

$P(AB)=P(B).P(A\,|\,B)=0,5.0,4=0,2.$

b) Đúng.

$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,5=0,5;P(A\overline{B})=P(\overline{B}).P(A\,|\,\overline{B})=0,5.0,4=0,2.$

c) Sai.

$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=0,2+0,2=0,4.$

d) Đúng.

Vì $P(AB)=0,2=0,4.0,5=P(A).P(B)$ nên A và B là hai biến cố độc lập.

Câu 7.

a) Sai.

Vì $P(A)=0,8$ nên $P(\overline{A})=1-P(A)=0,2.$

b) Sai.

$P(AB)=0,4;P(\overline{A}B)=0,55\Rightarrow P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=0,95.$

c) Sai.

Vì $P(AB)=0,4\neq 0,8.0,95=P(A).P(B)$ nên A và B không phải là hai biến cố độc lập.

d) Sai.

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0,4}{0,95}=\frac{8}{19}.$$

Câu 8.

a) Đúng.

Xác suất của biến cố A là $P(A)=\dfrac{3.2}{A_4^2}=0,5$.

b) Sai.

AB là biến cố "Số tạo thành là số chẵn và chia hết cho 3".

Xác xuất của biến cố AB là $P(AB)=\dfrac{2}{A_4^2}=\dfrac{1}{6}$.

c) Đúng.

$$P(B)=\frac{A_3^2}{A_4^2}=0,5;P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{0,5}=\frac{1}{3}.$$

d) Đúng.

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0,5-\frac{1}{6}=\frac{1}{3};P(\overline{B})=1-P(B)=0,5.$$

$$P(A\mid\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{\frac{1}{3}}{0,5}=\frac{2}{3}.$$

Câu 9.

a) Sai.

Xác suất của biến cố B là $P(B)=\dfrac{C_3^3+C_7^3}{C_{10}^3}=0,3$.

b) Đúng.

AB là biến cố "Ba bạn được chọn đều là nam".

Xác suất của biến cố AB là $P(AB)=\dfrac{C_3^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{120}$.

c) Sai.

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{120}}{0,3}=\frac{1}{36}.$$

d) Sai.

$$P(A)=1-\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{17}{24};P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{17}{24}-\frac{1}{120}=0,7;$$

$$P(A \mid \overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A\overline{B})}{1-P(B)}=\frac{0,7}{1-0,3}=1.$$

Cách khác: Biến cố A với điều kiện $\overline{B}$ là biến cố chắc chắn nên $P(A \mid \overline{B}) = 1$.

Câu 10. Gọi A là biến cố "Bệnh nhân được điều trị trong 6 giờ đầu sau khi đột quỵ" và B là biến cố "Bệnh nhân hồi phục".

Ta có: $P(A)=0,4; P(B)=0,35; P(AB)=0,3$.

a) Sai.

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0,3}{0,35}=\frac{6}{7}.$$

b) Sai.

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0,4-0,3=0,1; P(\overline{B} \mid A)=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=\frac{0,1}{0,4}=0,25.$$

c) Sai.

$$P(\overline{A})=1-P(A)=0,6; P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=0,35-0,3=0,05.$$

$$P(B \mid \overline{A})=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{0,05}{0,6}=\frac{1}{12}.$$

d) Sai.

$$P(B \mid A)=\frac{P(B)P(A \mid B)}{P(A)}=\frac{0,35.\frac{6}{7}}{0,4}=0,75; \frac{P(B \mid A)}{P(B \mid \overline{A})}=\frac{0,75}{\frac{1}{12}}=9.$$

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

A. Xác suất cổ điển

Câu 1. Từ 5 đoạn thẳng với độ dài đã cho, ta có thể lập được tam giác vuông với ba cạnh là (3; 4; 5) hoặc (5; 12; 13).

Số cách để chọn ngẫu nhiên 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng là $C_5^3=10$.

Vậy xác suất để 3 đoạn thẳng được chọn là ba cạnh của một tam giác vuông là $\frac{2}{10}=0,2$.

Câu 2. Gọi A là biến cố "Đôi nam nữ được chọn không phải là một cặp vợ chồng", $\overline{A}$ là biến cố "Đôi nam nữ được chọn là một cặp vợ chồng".

Ta có: $n(\Omega)=100$; $n(\overline{A})=8$. Do đó $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{8}{100}=0,92$.

Câu 3. Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{64}^2$.

Chọn ngẫu nhiên 1 ô vuông trong 64 ô: Có 64 cách.

Chọn ngẫu nhiên 1 ô vuông không cùng nằm trên một hàng ngang hay cột dọc với ô vuông đã chọn: Có 49 cách.

Chọn 2 ô vuông không cùng nằm trên một hàng ngang hay cột dọc nào: Có $\frac{64.49}{2}$ cách (vì mỗi 2 ô vuông được lấy hai lần).

Xác suất 2 ô vuông được chọn không cùng nằm trên một hàng ngang hay cột dọc nào của bàn cờ là $\frac{\frac{64.49}{2}}{C_{64}^2}=\frac{7}{9}$.

Câu 4. Chọn ngẫu nhiên 3 cạnh bất kì từ các cạnh của đa giác đều có 12 cạnh: Có C_{12}^3 cách.

Trường hợp 1: Chọn 3 cạnh liền kề nhau: Có 12 cách.

Trường hợp 2: Chọn 3 cạnh gồm 2 cạnh có điểm chung và cạnh còn lại không có điểm chung nào: Có $12.C_8^1=96$ cách.

Xác suất để 2 cạnh bất kì trong 3 cạnh được chọn không có điểm chung là

$1-\frac{12+96}{C_{12}^3}=\frac{28}{55}$.

Câu 5. Gọi A là biến cố "Có đúng 2 quả bóng xanh trong 3 quả bóng được chọn".

Xác suất của biến cố A là $P(A)=\frac{C_k^2.C_{10-k}^1}{C_{10}^3}=\frac{\frac{k!}{2!(k-2)!}(10-k)}{120}=\frac{(k-1)k(10-k)}{240}$.

$P(A)$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $k=7$.

B. Xác suất có điều kiện

Câu 6. Gọi M là biến cố "Gia đình có trên 4 thành viên", N là biến cố "Gia đình có 3 thế hệ chung sống".

Ta có $P(M)=0,4; P(\overline{M})=0,6; P(N\mid M)=0,7; P(N\mid \overline{M})=0,2$.

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$P(N)=P(M).P(N\mid M)+P(\overline{M}).P(N\mid \overline{M})=0,4.0,7+0,6.0,2=0,4$.

Vậy $P(M\mid N)=\frac{P(M).P(N\mid M)}{P(N)}=\frac{0,4.0,7}{0,4}=0,7$.

Câu 7. $\frac{C_4^3}{C_5^3}=0,4$.

Câu 8. Gọi M là biến cố "A đứng cạnh C", N là biến cố "A không đứng cạnh E".

Ta có $P(M)=\frac{2.4!}{5!}=\frac{2}{5}; P(M\overline{N})=\frac{2.3!}{5!}=\frac{1}{10}; P(N)=1-P(\overline{N})=1-\frac{2.4!}{5!}=\frac{3}{5}$;

$$P(MN)=P(M)-P(M\overline{N})=\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{10}.$$

Vậy $P(M|N)=\dfrac{P(MN)}{P(N)}=0,5.$

Câu 9. Gọi A là biến cố "Thu lấy được thẻ ghi số 10", B là biến cố "Xuân lấy được thẻ ghi số chẵn" và C là biến cố "Xuân không lấy được thẻ ghi số 10".

Ta có $P(A\overline{B})=P(\overline{B})P(A\,|\,\overline{B})=0,5.\left(1-\dfrac{C_8^2}{C_9^2}\right)=\dfrac{1}{9};$

$$P(AB)=P(ABC)=P(BC).P(A\,|\,BC)=\frac{4}{10}.\frac{1}{9}=\frac{2}{45}.$$

Vậy $P(A)=\ P(AB)+P(A\overline{B})=\dfrac{7}{45}.$

Câu 10. Gọi A là biến cố "Đồng xu xuất hiện mặt ngửa".

$$P(X=k)=P(X=k|A)P(A)+P(X=k|\overline{A})P(\overline{A})=0,5\left[P(X=k|A)+P(X=k|\overline{A})\right].$$

Nếu $1\le k\le 6$ thì $P(X=k\,|\,A)=\dfrac{1}{6};P(X=k\,|\,\overline{A})=\dfrac{k-1}{36}$. Suy ra $P(X=k)=\dfrac{k+5}{72}.$

Nếu $7\le k\le 12$ thì $P(X=k\,|\,A)=0;P(X=k\,|\,\overline{A})=\dfrac{13-k}{36}$. Suy ra $P(X=k)=\dfrac{13-k}{72}.$

Vậy $P(X=k)$ đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{11}{72}$ khi $k=6.$

ĐỀ ÔN TẬP

ĐỀ SỐ 1

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. B

Câu 2. B

Câu 3. A

Xét hàm số $y = f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-1; 2]$, ta có:

$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \sqrt{2}$.

$f(0) = 5; f\left(\sqrt{2}\right) = 1; f(-1) = 2; f(2) = 5$.

Từ đó, $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f\left(\sqrt{2}\right) = 1$.

Câu 4. B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2; -2\}$.

$$y = f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x-2}.$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-1}{x-2} = +\infty;\ \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x-1}{x-2} = \frac{3}{4};\ \lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x-1}{x-2} = \frac{3}{4}.$$

Suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$.

Câu 5. A

Câu 6. B

Câu 7. A

Câu 8. C

$Q_1 = 163; Q_3 = 170; \Delta_Q = 7$.

Câu 9. B

Kiến thức cần nhớ:

Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Câu 10. D

Câu 11. C

Kiến thức cần nhớ:

Mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính bằng R có phương trình là

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Câu 12. D

Vì (Q) song song với (P) nên (Q) có dạng $x+2y+z+d=0$ (với $d \neq 0$).

(Q) đi qua $A(1; 2; -1)$ nên $1+2 . 2+(-1)+d=0$, suy ra $d=-4$.

Vậy (Q) có phương trình là $x+2y+z-4=0$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 13.

a) Đúng.

Ta có $xy=200 \Rightarrow y=\dfrac{200}{x}$.

b) Sai.

$L=2x+y=2x+\dfrac{200}{x}$.

c) Đúng.

d) Sai.

$L'=2x-\dfrac{200}{x^2}=\dfrac{2(x^2-100)}{x^2}$; $L'=0 \Leftrightarrow x=10$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		10		$+\infty$
L'		$-$	0	$+$	
L	$+\infty$	$\searrow$	40	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của L là 40 m khi $x=10$ (m).

Số tiền tối thiểu để mua lưới thép rào mảnh vườn là

$40 . 250=10\,000$ (nghìn đồng) $=10$ (triệu đồng).

Câu 14.

a) Đúng.

Ta có $F'(x)=f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F'(2)=f(2)=e^2-4$.

b) Sai.

$\int f(x)\,dx = \int (e^x - 2x)dx = e^x - x^2 + C.$

c) Sai.

$\int_0^2 f(x)\,dx = (e^x - x^2)\Big|_0^2 = (e^2 - 4) - (e^0 - 0) = e^2 - 5.$

d) Đúng.

$S = \int_0^2 |f(x)|\,dx = \int_0^2 |e^x - 2x|\,dx = e^2 - 5.$

Câu 15.

a) Đúng.

Kiến thức cần nhớ:

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ trên mặt phẳng (Oxy) là $A'(x_A; y_A; 0)$.

b) Sai.

Kiến thức cần nhớ:

Cho các điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Vậy $\overrightarrow{AB} = (4; -6; -2)$.

c) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-1; -1; 0)$ và mặt phẳng (Oxy) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.
Vì $\overrightarrow{BC}$ vuông góc với $\vec{k}$ và $B \notin (Oxy)$ nên $BC \parallel (Oxy)$.

d) Sai.

Gọi $M(x_0; y_0; 0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy). Do ba điểm A, B, M thẳng hàng nên hai vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ là hai vectơ cùng phương với $\overrightarrow{AM} = (x_0 + 1; y_0 - 2; -3)$, $\overrightarrow{AB} = (4; -6; -2)$.

Suy ra $\dfrac{x_0 + 1}{4} = \dfrac{y_0 - 2}{-6} = \dfrac{-3}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = -7 \end{cases} \Rightarrow M(5; -7; 0).$

Từ đó, ta có $CM = \sqrt{14}$.

Câu 16.

a) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 4; -6)$ là một vectơ pháp tuyến của (Q). Vậy (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 2; -3)$.

b) Sai.

Gọi $I(4;\ 3;\ 4)$ là trung điểm của AB. Phương trình mặt phẳng trung trực của AB là (Q): $(x-4)+2(y-3)-3(z-4)=0$ hay (Q) $x+2y-3z+2=0$.

Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d=\frac{1}{5}\left[\vec{n}_{(P)},\ \vec{n}_{(Q)}\right]=(1;\ 1;\ 1)$.

Tìm toạ độ điểm H thuộc d là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x-y-z=-4\\ x+2y-3z=-2.\end{cases}$

Chọn $z=0$, suy ra $x=-2$; $y=0\Rightarrow H(-2;\ 0;\ 0)$.

Vậy phương trình đường thẳng d: $\frac{x+2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.

c) Đúng.

Từ $MA=MB$, suy ra M thuộc mặt phẳng trung trực (Q) của đoạn thẳng AB. Vậy M thuộc giao tuyến của (Q) và (P), nghĩa là $M\in d$.

d) Đúng.

Điểm $C\in(P)$ và $CA=CB\Rightarrow C\in d$ nên $C(t-2;\ t;\ t)$.

$CA=\sqrt{35}\Leftrightarrow(5-t)^2+(1-t)^2+(7-t)^2=35.$

$\Leftrightarrow 3t^2-26t+75=35\Leftrightarrow 3t^2-26t+40=0\Leftrightarrow t=\frac{20}{3}$ hoặc $t=2$.

Điểm C có hoành độ nguyên, suy ra $C(0;\ 2;\ 2)$.

Vậy $OC=\sqrt{0+4+4}=2\sqrt{2}$.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 17. 18.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x)$ là hàm số bậc hai có hai nghiệm là 0 và -2 nên $f'(x)=ax(x+2)$ (với a là số thực).

Từ đó, $f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=a\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)+C$ (với C là hằng số).

Từ dấu của $f'(x)$ suy ra $f(x)$ đạt cực đại tại $x=-2$, đạt cực tiểu tại $x=0$.

Từ đó, $\begin{cases}f(0)=-2\\ f(-2)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=-2\\ a\left(-\frac{8}{3}+4\right)+C=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=-2\\ a=3.\end{cases}$

Vậy $f(x)=x^3+3x^2-2$. Suy ra $f(2)=18$.

Câu 18. 27 lít.

Ta có $V'(t) = v(t) \Rightarrow V(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t.$

Thể tích dầu bị mất đi trong khoảng thời gian từ 13 giờ đến 16 giờ là

$$V_1 = \int_0^3 v(t)\mathrm{d}t = \int_0^3 (16+3t)\mathrm{d}t = \left(16t + \frac{3t^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = 61,5\ (l).$$

Thể tích dầu bị mất đi trong khoảng thời gian từ 16 giờ đến 19 giờ là

$$V_2 = \int_3^6 v(t)\mathrm{d}t = \int_3^6 (16+3t)\mathrm{d}t = \left(16t + \frac{3t^2}{2}\right)\Bigg|_3^6 = 88,5\ (l).$$

Do đó, $V_2 - V_1 = 88,5 - 61,5 = 27\ (l)$.

Câu 19. 0,34.

Gọi A là biến cố "Xạ thủ được chọn thuộc hạng I", B là biến cố "Xạ thủ được chọn thuộc hạng II", C là biến cố "Xạ thủ chỉ bắn một viên đạn trúng đích". Ta cần tính $P(A|C)$.

Ta có:

$$P(A|C) = \frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)} = \frac{0,4.2.0,8.0,2}{0,4.2.0,8.0,2+0,6.2.0,3.0,7} = \frac{32}{95} \approx 0,34.$$

Câu 20. 2,96.

Ta có bảng tần số ghép nhóm:

Nhóm	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)
Tần số	4	12	20	8	6

Tứ phân vị thứ nhất $Q_1 = \dfrac{113}{12}$.

Tứ phân vị thứ ba $Q_3 = \dfrac{99}{8}$.

Khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \dfrac{71}{24} \approx 2,96$.

Câu 21. 5,45.

Tìm toạ độ điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}.$

Suy ra $\begin{cases} x_I = \dfrac{1}{3}x_A + \dfrac{2}{3}x_B \\ y_I = \dfrac{1}{3}y_A + \dfrac{2}{3}y_B \\ z_I = \dfrac{1}{3}z_A + \dfrac{2}{3}z_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = -2 \\ y_I = 1 \\ z_I = -1. \end{cases}$

Do đó $I(-2; 1; -1)$.

Hơn nữa $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$ nên $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right| = 9 \Leftrightarrow 3\left|\overrightarrow{MI}\right| = 9 \Leftrightarrow IM = 3$.

Khi đó, tập hợp điểm M là mặt cầu tâm $I(-2; 1; -1)$, bán kính $R = 3$.

Suy ra, độ dài lớn nhất của đoạn OM bằng $OI + R = \sqrt{6} + 3 \approx 5,45$.

Câu 22. 3.

Ta xác định được $D(0; 12; 0)$, $C(6; 6; 0)$.

Vì góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45° nên $AC = AS = 6\sqrt{2}$.

Suy ra $S(0; 0; 6\sqrt{2})$.

Phương trình mặt phẳng (SCD) là $x + y + \sqrt{2}z - 12 = 0$.

Vậy $d(B;(SCD)) = \dfrac{\left|6 + 0 + \sqrt{2}.0 - 12\right|}{2} = 3$.

ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. D

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai tiệm cận đứng là $x = 0$, $x = 2$ và hai tiệm cận ngang là $y = 2$, $y = -2$.

Câu 2. C

$f'(x) = 3x^2 - 6x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

$f(-1) = -2; f(0) = 2; f(1) = 0 \Rightarrow \max\limits_{[-1;\,1]} f(x) = f(0) = 2.$

Câu 3. A

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có điểm chung với đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$ nên phương trình $f(x) = \dfrac{3}{2}$ hay $2f(x) - 3 = 0$ vô nghiệm.

Câu 4. A

Ta có $y' = x^2 + 2x - m$.

Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - mx - 1$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng (0; 4) khi phương trình $y' = 0$ chỉ có đúng một nghiệm thuộc khoảng (0; 4).

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = m$. (*)

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = x^2 + 2x$ trên khoảng (0; 4) như sau:

x	0		4
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	24

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình (*) có đúng một nghiệm thuộc khoảng (0; 4) khi $0 < m < 24$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3; \ldots; 23\}$. Vậy có 23 giá trị nguyên của m thoả mãn yêu cầu.

Câu 5. A

Câu 6. D

Câu 7. D

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,7 + 0,5 - 0,8 = 0,4.$

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,4}{0,5} = 0,8.$

Câu 8. A

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S \approx 1,456 \in [1,4; 1,6)$.

Câu 9. C

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương vì chúng có giá song song với nhau.

Câu 10. C

Câu 11. A

Câu 12. B

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 13.

a) Sai.

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -x + 1$.

b) Đúng.

Ta có $f'(x) = -1 + \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x - x^2}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$.

c) Sai.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		2	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là 2.

d) Đúng.

Với $x > 1$, ta có:

$x^2 + (m-2)x - m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow m(x-1) \geq -x^2 + 2x - 2$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2x - 2}{x-1} \leq m \text{ hay } f(x) \leq m.$$

Từ bảng biến thiên, ta có $f(x) \le -2$ với mọi $x > 1$.

Suy ra nếu $m \ge -2$ thì bất phương trình $f(x) \le m$ nghiệm đúng với mọi $x > 1$.

Câu 14.

a) Đúng.

Khi $x < 1$, ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (2x-1)\,\mathrm{d}x = x^2 - x + C_1$.

Khi $x > 1$, ta có: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (3x^3 - 2)\,\mathrm{d}x = x^3 - 2x + C_2$.

Vì $F(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên $F(x) = \begin{cases} x^2 - x + C_1 & \text{khi } x \le 1 \\ x^3 - 2x + C_2 & \text{khi } x > 1. \end{cases}$

b) Đúng.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (2x-1)\mathrm{d}x = (x^2 - x)\Big|_{-1}^{1} = (1^2 - 1) - [(-1)^2 - (-1)] = -2.$$

c) Sai.

$$\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{3} (3x^2 - 2)\mathrm{d}x = (x^3 - 2x)\Big|_{1}^{3} = (3^3 - 2.3) - (1^3 - 2.1) = 22.$$

d) Sai.

$$\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = -2 + 22 = 20.$$

Câu 15.

a) Đúng.

Toạ độ trung điểm $C(x_C; y_C; z_C)$ của đoạn thẳng OB là $\begin{cases} x_C = \dfrac{x_B + x_O}{2} \\ y_C = \dfrac{y_B + y_O}{2} \\ z_C = \dfrac{z_B + z_O}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = 2 \\ z_C = -1. \end{cases}$

Suy ra $C(1; 2; -1)$.

b) Đúng.

Vì A, C, C' không thẳng hàng nên để tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$.

Suy ra $A'(3; -3; 1)$, do đó cao độ của điểm A' là $z = 1$.

c) Sai.

Vì điểm B' là đỉnh còn lại của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ nên $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$. Suy ra $B'(4; 4; -3)$.

Do đó tung độ của điểm B' là $y = 4$.

d) Đúng.

Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.d(A',(ABC))$.

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (-1;\ 3;\ 5)$ nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{\sqrt{35}}{2}$.

Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C là $x - 3y - 5z = 0$.

$d(A',(ABC)) = \frac{|3-3.(-3)-5.1|}{\sqrt{35}} = \frac{7\sqrt{35}}{35}$. Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{7}{2}$.

Câu 16.

a) Đúng.

Bán kính $R = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

b) Sai.

Thay toạ độ của điểm K vào phương trình mặt cầu (S), ta có

$(1-2)^2 + (-3+6)^2 + 0^2 = 10 \neq 50$.

Do đó, điểm K không thuộc mặt cầu (S).

c) Sai.

Ta có $\overrightarrow{IK} = (1;-3;0) \Rightarrow IK = \sqrt{10}$.

d) Đúng.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-6;0)$, bán kính $R = 5\sqrt{2}$.

Vì M thuộc (S) nên $MI = R = 5\sqrt{2}$.

Ta có $\cos\widehat{KMI} = \frac{MK^2 + MI^2 - KI^2}{2.MK.MI} = \frac{MK^2 + 50 - 10}{2.MK.5\sqrt{2}} = \frac{MK^2 + 40}{10\sqrt{2}.MK}$.

Vì $0^\circ < \widehat{KMI} < 90^\circ$ nên $0 < \cos\widehat{KMI} < 1$.

Đặt $x = MK$, $x > 0$. Xét hàm số $f(x) \quad \frac{40}{10\sqrt{2}.}$ với $x > 0$.

Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0; +\infty)$ bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$ tại $x = 2\sqrt{10}$.

Do đó $\cos\widehat{KMI}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $MK = 2\sqrt{10}$.

Vậy $\widehat{KMI}$ lớn nhất khi giá trị của MK bằng $2\sqrt{10}$.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 17. 0,075 mg/cm^3.

Ta có $C'(t) = \dfrac{0,15(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$, $t \geq 0$.

Bảng biến thiên của hàm số $C(t)$ trên $(0; +\infty)$.

t	0		1		$+\infty$
$C'(t)$		$+$	0	$-$	
$C(t)$	0	$\nearrow$	$0,075$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị lớn nhất bằng 0,075 mg/cm^3.

Câu 18. 3,14 giây.

Ta có $s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \int \dfrac{1}{4}\sin t\,\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{4}\cos t + C.$

Theo đề bài, ta có $s(0) = -0,25$ nên $-\dfrac{1}{4}\cos 0 + C = -0,25 \Leftrightarrow C = 0.$

Do đó $s(t) = -\dfrac{1}{4}\cos t$; $\max s(t) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \cos t = -1 \Leftrightarrow t = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy lần đầu tiên vật đạt đến vị trí cao nhất khi $t = \pi \approx 3,14$ giây.

Câu 19. 0,06.

Bảng tần số ghép nhóm:

Nhóm	[15; 16)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)	[19; 20)
Tần số	6	12	18	10	4

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là $\overline{x} = 17,38$.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S \approx 1,107068$.

Tỉ số của độ lệch chuẩn và số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên là
$\dfrac{S}{\overline{x}} \approx \dfrac{1,107068}{17,38} \approx 0,06.$

Câu 20. 0,64.

Gọi A là biến cố "Người được chọn bị cao huyết áp" và B là biến cố "Người được chọn là nam giới".

Do có 60% số người trong nhóm là nam giới nên $P(B) = 0{,}6$ và $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Gọi tỉ lệ nữ giới bị cao huyết áp trong nhóm người là a $(0 \le a \le 1)$. Do tỉ lệ nam giới bị cao huyết áp gấp 1,2 lần tỉ lệ nữ giới bị cao huyết áp nên $P(A \mid \overline{B}) = a$ và $P(A|B) = 1{,}2a$.

Theo công thức xác suất toàn phần, xác suất một người bị cao huyết áp là
$P(A) = P(B)P(A \mid B) + P(\overline{B})P(A \mid \overline{B}) = 0{,}6.1{,}2a + 0{,}4.a = 1{,}12a.$

Theo công thức Bayes, xác suất người được chọn là nam giới, biết rằng người đó bị cao huyết áp là $P(B \mid A) = \dfrac{P(B)P(A \mid B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}6.1{,}2a}{1{,}12a} \approx 0{,}64.$

Câu 21. –9.

Tìm toạ độ điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$:

Ta có $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}.$

Suy ra $\begin{cases} x_I = -\dfrac{1}{2}x_A + x_B + \dfrac{1}{2}x_C \\ y_I = -\dfrac{1}{2}y_A + y_B + \dfrac{1}{2}y_C \\ z_I = -\dfrac{1}{2}z_A + z_B + \dfrac{1}{2}z_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -\dfrac{1}{2} + (-3) + \dfrac{3}{2} \\ y_I = 1 + (-1) + 1 \\ z_I = \dfrac{1}{2} + 2 + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -2 \\ y_I = 1 \\ z_I = 3. \end{cases}$

Do đó $I(-2; 1; 3)$.

Hơn nữa $P = MA^2 - 2MB^2 - MC^2 + MD = \overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 + MD$

$= (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM})^2 - 2(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM})^2 - (\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM})^2 + MD$

$= IA^2 - 2IB^2 - IC^2 - 2IM^2 + MD.$

Ta có $IA^2 - 2IB^2 - IC^2 = -8$ và $D \equiv M$ nên $P = -8 - 2IM^2 + IM$.

Đặt $t = IM$.

Gọi $H(-2; 0; 3)$ là hình chiếu vuông góc của điểm I trên mặt phẳng (Oxz), ta có $IH = 1$.

Khi đó, $IM \ge IH$ hay $t \ge IH \Rightarrow t \ge 1$.

Xét hàm số $f(t) = -2t^2 + t - 8$, $t \in [1; +\infty)$. Ta có $\max\limits_{[1;+\infty)} f(t) = f(1) = -9$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là –9.

Câu 22. 4,24.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$.

Phương trình đường thẳng d và Δ lần lượt là $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$;

$\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{1}.$

Ta có $d \cap (P) = A(0; 1; -3)$; $\Delta \cap (Q) = B(3; 1; 0)$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = (3; 0; 3)$.

Do đó $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24.$

ĐỀ SỐ 3

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. A

Câu 2. D

Câu 3. A

$f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-2}{x^2}$ $(x > 0)$.

Bảng xét dấu của đạo hàm:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Từ đó, hàm số có $x = 2$ là điểm cực tiểu.

Câu 4. D

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu

$f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = a^2 - 3\ .\ 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq a \leq 3$.

Vậy có 7 số nguyên a thoả mãn yêu cầu là -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3.

Câu 5. B **Câu 6.** A **Câu 7.** D **Câu 8.** A

Câu 9. D **Câu 10.** A **Câu 11.** B **Câu 12.** D

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 13.

a) Đúng. b) Sai. c) Đúng. d) Sai.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$f'(x) = \dfrac{-2(x^2 - x - 2)}{(x^2 + 2)^2}$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Câu 14.

a) Đúng.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(6\sqrt{x}-5\right)\mathrm{d}x = 4x\sqrt{x}-5x+C.$

b) Đúng.

$\int\left[f(x)-1\right]\mathrm{d}x = \int\left(6\sqrt{x}-6\right)\mathrm{d}x = 4x\sqrt{x}-6x+C.$

c) Sai.

$\int_1^4\left[f(x)-1\right]\mathrm{d}x = \int_1^4\left(6\sqrt{x}-6\right)\mathrm{d}x = \left.\left(4x\sqrt{x}-6x\right)\right|_1^4 = (32-24)-(4-6) = 10.$

d) Đúng.

$S = \int_1^4\left|f(x)-1\right|\mathrm{d}x = \int_1^4\left|6\sqrt{x}-6\right|\mathrm{d}x = \left|\left.\left(4x\sqrt{x}-6x\right)\right|_1^4\right| = 10.$

Câu 15.

a) Sai.

$\overrightarrow{AB} = (-2-1;\, 1-2;\, 1-3) = (-3;\, -1;\, -2).$

b) Đúng.

$AC = \sqrt{(-3-1)^2+(3-2)^2+(-2-3)^2} = \sqrt{42}.$

c) Sai.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;\, -1;\, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-4;\, 1;\, -5)$.

Do đó $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 30^\circ.$

Vậy $\widehat{BAC}$ là góc nhọn.

d) Đúng.

Do $\widehat{AMB} = 90^\circ$ nên M thuộc mặt cầu đường kính AB có tâm $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right)$ và bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Hơn nữa, M thuộc mặt phẳng (Ozx) nên các điểm M thuộc đường tròn (C) là giao của mặt cầu $(I; R)$ với mặt phẳng (Ozx).

Đường tròn (C) có tâm $J\left(-\frac{1}{2}; 0; 2\right)$ và bán kính r là

$$r = \sqrt{R^2 - IJ^2} = \sqrt{\frac{7}{2} - \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của OM là $OJ + r = \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 3,18$.

Câu 16.

a) Sai.

Tâm I của mặt cầu (S) có toạ độ là $(1; 1; 1)$.

b) Đúng.

Gọi $D(x; y; z)$, ta có $3\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = (-6x + 6; -6y + 24; -6z - 18)$.

Vì $3\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ nên $x = 1; y = 4; z = -3$. Vậy $D(1; 4; -3)$.

c) Đúng.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm I và D có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{ID} = (0; 3; -4)$.

d) Sai.

$T = 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 3\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$

$= 3\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}\right)^2$

$= 6\overrightarrow{MD}^2 + 2\overrightarrow{MD}\left(3\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right) + 3DA^2 + 2DB^2 + DC^2$

$= 6MD^2 + 3DA^2 + 2DB^2 + DC^2$.

Do điểm $D(1; 4; -3)$ nằm ngoài mặt cầu (S) nên biểu thức T đạt giá trị nhỏ nhất khi MD ngắn nhất.

Ta có MD ngắn nhất khi và chỉ khi $MD = ID - R = 5 - 1 = 4$.

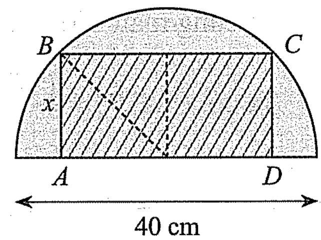
Giá trị nhỏ nhất của biểu thức T là

$T = 6 . 4^2 + 3 . 26 + 2 . 24 + 546 = 768$.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 17. 400 cm^2.

Kí hiệu hình chữ nhật $ABCD$ như hình bên.



Đặt $AB = x$ (cm) $(0 < x < 20)$.

Ta có $BC = 2\sqrt{20^2 - x^2} = 2\sqrt{400 - x^2}$ (cm).

Diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là: $S = 2x\sqrt{400 - x^2}$.

Xét hàm số $S = 2x\sqrt{400 - x^2}$ trên (0; 20).

Ta có: $S' = -\dfrac{4(x^2 - 200)}{\sqrt{400 - x^2}}$; $S' = 0 \Leftrightarrow x = 10\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$10\sqrt{2}$		20
S'		+	0	−	
S		↗	400	↘	

Từ đó, $\max\limits_{(0;\,20)} S = S\left(10\sqrt{2}\right) = 400$ (cm^2).

Câu 18. 740 dặm.

Ta có $s(t) = \int\limits_0^t 30(16 - t^2)\mathrm{d}t = 480t - 10t^3$.

Khi vận tốc tức thời đạt 400 dặm/giờ tức là $30(16 - t^2) = 400 \Leftrightarrow t = \dfrac{\sqrt{24}}{3}$ (giờ).

Khi đó máy bay đã bay được quãng đường là

$$s = 480.\frac{\sqrt{24}}{3} - 10\left(\frac{\sqrt{24}}{3}\right)^3 \approx 740 \text{ (dặm)}.$$

Câu 19. 0,32.

Bảng tần số ghép nhóm:

Nhóm	[75; 80)	[80; 85)	[85; 90)	[90; 95)	[95; 100)
Tần số	10	14	10	4	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là 100 – 75 = 25 (g).

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = 80$; tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 88$.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là 80 – 88 = 8.

Tỉ số của khoảng tứ phân vị và khoảng biến thiên là 8 : 25 = 0,32.

Câu 20. 0,55.

Gọi A là biến cố "Bạn Phú lấy được viên bi màu xanh"; B là biến cố "Các viên bi lấy ra có cùng màu". Ta cần tính $P(A|\overline{B})$.

Ta có $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{B}\mid A)P(A)}{P(\overline{B})} = \dfrac{(1-P(B\mid A))P(A)}{1-P(B\mid A)P(A)-P(B\mid \overline{A})P(\overline{A})}$.

Do $P(A)=\dfrac{10}{15}$; $P(\overline{A})=\dfrac{5}{15}$; $P(B|A)=\dfrac{C_9^2}{C_{14}^2}=\dfrac{36}{91}$; $P(B|\overline{A})=\dfrac{C_4^3}{C_{14}^3}=\dfrac{1}{91}$.

Vậy $P(A|\overline{B})=\dfrac{11}{20}=0,55$.

Câu 21. 3,3.

Trung điểm của BC là $I(1;\ 4;\ 1)$.

Ta có $S=2MA+\left|2\overrightarrow{MI}\right|=2(MA+MI)$.

Do điểm A và điểm I nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) nên $MA + MI = MA' + MI$ với $A'(-1;\ 1;\ -2)$ là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oxy).

Ta lại có $S = 2(MA' + MI) \geq 2A'I$.

Suy ra $M \in (Oxy)$ và M, A', I thẳng hàng.

Khi đó, hai vectơ $\overrightarrow{A'M}=(a+1;\ b-1;\ 2)$, $\overrightarrow{A'I}=(2;\ 3;\ 3)$ cùng phương.

Suy ra $\dfrac{a+1}{2}=\dfrac{b-1}{3}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=3. \end{cases}$

Vậy $a+b=\dfrac{10}{3}\approx 3,3$.

Câu 22. 2,69.

Ta có $A(a;\ 0;\ 0)$, $C'(0;\ 1;\ b) \Rightarrow \overrightarrow{AC'}=(-a;\ 1;\ b)$;

$B'(-a;\ 0;\ b)$, $C(0;\ 1;\ 0) \Rightarrow \overrightarrow{B'C}=(a;\ 1;\ -b)$.

Vì (α) chứa $B'C$ và song song với $A'C$ nên (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{B'C}\right]=(-2b;\ 0;\ -2a)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là $bx + az = 0$ với $a + b = 4$.

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) là $d(A,(\alpha))=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{-a^2+4a}{\sqrt{2a^2-8a+16}}$.

Trên [0; 4], hàm số $f(x)=\dfrac{-x^2+4x}{\sqrt{2x^2-8x+16}}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{2}$ tại $x=2$.

Suy ra $a=b=2$.

Khi đó $A(2;0;0)$, $B(-2;0;0)$, $C(0;1;0)$, $B'(-2;0;2)$.

Do đó $AC=BC=\sqrt{5}$ nên tam giác ABC cân tại C và $OC\perp AB$.

Phương trình tham số của đường thẳng CO: $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Diện tích tam giác ABC: $S=\dfrac{1}{2}.AB.CO=\dfrac{1}{2}\,.\,4\,.\,1=2$.

Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có

$$r=\frac{AB.BC.CA}{4S}=\frac{4\,.\,\sqrt{5}\,.\,\sqrt{5}}{4\,.\,2}=\frac{5}{2}.$$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có $IA^2=IC^2\Rightarrow t=-\dfrac{3}{2}$.

Do đó $I\left(0;-\dfrac{3}{2};0\right)$.

Lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có chiều cao $BB'=2$.

Gọi I' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ thì $I'\left(0;-\dfrac{3}{2};2\right)$.

Khi đó trung điểm $J\left(0;-\dfrac{3}{2};1\right)$ của II' là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Bán kính mặt cầu đi qua sáu điểm A, B, C, A', B', C' là: $R=JC=\dfrac{\sqrt{29}}{2}\approx 2,69$.

ĐỀ SỐ 4

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. A

Câu 2. B

Bảng xét dấu của đạo hàm:

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ đó, hàm số $y=f(x)$ chỉ có một điểm cực trị là $x=-3$.

Câu 3. B

Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là $x=1$ và 1 tiệm cận ngang là $y=1$.

Câu 4. C

$f'(x)=xe^x(x+2), \forall x \in \mathbb{R}$.

Bảng xét dấu của đạo hàm:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Giá trị cực tiểu của hàm số là $f(0)=1$, suy ra $a=1$.

Giá trị cực đại của hàm số là $f(-2)=(-2)^2e^{-2}+1=\dfrac{4}{e^2}+1$.

Câu 5. A

$$\int_0^1 (e^x-4x^3)\,\mathrm{d}x=(e^x-x^4)\Big|_0^1=(e^1-1)-(e^0-0)=e-2.$$

Câu 6. D

Câu 7. C

Câu 8. B

$Q_1=250$; $Q_3=325$; $\Delta_Q=75$.

Câu 9. B

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

Câu 10. B

Đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1;\ 1;\ 0)$ và $B(3;\ 2;\ -1)$ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (4;\ 1;\ -1)$ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 1 + t \\ z = -t. \end{cases}$

Câu 11. A

Câu 12. A

$$d(A,(\alpha)) = \frac{|2.1 + 2.1 + 0 - 1|}{3} = 1.$$

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 13.

a) Sai.

$C(0) = 0.$

b) Đúng. c) Sai. d) Đúng.

$C'(t) = 0{,}5e^{-0{,}5t}(1 - 0{,}5t);\ C'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$

Bảng biến thiên:

t	0		2		$+\infty$
$C'(t)$		$+$	0	$-$	
$C(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Từ bảng biên thiên, ta thấy:

– Kể từ thời điểm $t = 2$ (giờ), nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân giảm dần.

– Nồng độ thuốc trong máu không thể vượt quá 0,5 mg/ml (vì $\max C(t) = C(2) = \frac{1}{e} < 0{,}5$).

– Có thời điểm nồng độ thuốc trong máu bằng 0,3 mg/ml (vì $0 < 0{,}3 < \frac{1}{e}$).

Câu 14.

a) Sai.

$$\int f(x)\,dx = \int 2e^{-x}\,dx = 2\int \left(\frac{1}{e}\right)^x dx = 2\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^x}{\ln\frac{1}{e}} + C = -2e^{-x} + C.$$

b) Sai.

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2e^{-x}\,dx = \left(-2e^{-x}\right)\Big|_0^1 = -\frac{2}{e} + 2 = \frac{2e-2}{e}.$$

c) Đúng.

$$S=\int_0^1 |f(x)|\,dx=\int_0^1 2e^{-x}\,dx=\left(-2e^{-x}\right)\Big|_0^1=2-\frac{2}{e}.$$

d) Sai.

$$V=\pi\int_0^1 f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 4e^{-2x}\,dx=4\pi\left(\frac{e^{-2x}}{\ln e^{-2}}\right)\Bigg|_0^1=\pi\left(2-\frac{2}{e^2}\right).$$

Câu 15.

a) Đúng.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ lên trục Oz là $A'(0; 0; z_A)$.

b) Đúng.

Hình chiếu vuông góc của điểm $B(x_B; y_B; z_B)$ trên mặt phẳng (Oyz) là $B'(0; y_B; z_B)$.

c) Sai.

Gọi $E(x_E; 0; 0) \in Ox$ và $F(0; y_F; z_F) \in (Oyz)$ sao cho C là trung điểm của đoạn thẳng EF. Khi đó

$$\begin{cases}\dfrac{x_E+x_F}{2}=x_C\\ \dfrac{y_E+y_F}{2}=y_C\\ \dfrac{z_E+z_F}{2}=z_C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x_E+0}{2}=-1\\ \dfrac{0+y_F}{2}=2\\ \dfrac{0+z_F}{2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_E=-2\\ y_F=4\\ z_F=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}E(-2;0;0)\\ F(0;4;2).\end{cases}$$

Suy ra $EF=2\sqrt{6}<5$.

d) Đúng.

Do $I(a; b; c)$ là trực tâm của tam giác ABC nên $\begin{cases}AI\perp BC\\ BI\perp AC\\ I\in(ABC)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AC}=0\\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI}=\vec{0}.\end{cases}$

Ta có: $\overrightarrow{AI}=(a-3;\ b+2;\ c-5)$, $\overrightarrow{BI}=(a-2;\ b-1;\ c+3)$, $\overrightarrow{BC}=(-3;\ 1;\ 4)$, $\overrightarrow{AC}=(-4;\ 4;-4)$, $\overrightarrow{AB}=(-1;\ 3;\ -8)$.

Khi đó $\begin{cases}-3(a-3)+1(b+2)+4(c-5)=0\\ -4(a-2)+4(b-1)-4(c+3)=0\\ 20(a-3)+28(b+2)+8(c-5)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-b-4c=-9\\ a-b+c=-2\\ 5a+7b+2c=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=2\\ c=1.\end{cases}$

Suy ra $I(-1; 2; 1)$.

Vậy $a+b+c=-1+2+1=2$.

Câu 16.

a) Sai.

Ta có $4 . 1 - 2 + 2 . 3 + 13 = 21 \neq 0$ nên mặt phẳng (P) không đi qua điểm A.

b) Sai.

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) nên có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (4; -1; 2)$.

Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$

c) Đúng.

Gọi C là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P).

Vì $C \in \Delta$ nên $C(1 + 4t_0; 2 - t_0; 3 + 2t_0)$.

Vì $C \in (P)$ nên $4(1 + 4t_0) - (2 - t_0) + 2(3 + 2t_0) + 13 = 0$, suy ra $t_0 = -1$.

Vậy $C(-3; 3; 1)$.

d) Sai.

Một vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{CB} = (3; -2; -7)$.

Suy ra $a + b + c = 3 - 2 - 7 = -6$.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 17. 20 cm.

Ta có $V = 2x . x . y = 24\,000 \Rightarrow y = \dfrac{12\,000}{x^2}, x > 0$.

Độ dài dây thép cần dùng: $L = 4.x + 4.2x + 4y = 12x + 4.\dfrac{12\,000}{x^2} = 12x + \dfrac{48\,000}{x^2}$ (cm).

Xét hàm số $L = 12x + \dfrac{48\,000}{x^2}$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $L' = 12 - \dfrac{2.48\,000}{x^3} = \dfrac{12(x^3 - 8\,000)}{x^3}$; $L' = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8\,000 \Leftrightarrow x = 20$.

Bảng biến thiên:

x	0		20		$+\infty$
L'		$-$	0	$+$	
L	$+\infty$	$\searrow$	360	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra L đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 20$ (cm).

Câu 18. 6,89 l.

$$V=\pi\int_0^{16}(9+\sqrt{x})^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{16}(81+18\sqrt{x}+x)\mathrm{d}x=\pi\left(81x+12x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{16}=2192\pi\,(\mathrm{cm}^3).$$

Suy ra $V=2{,}192\pi\ (l)\approx 6{,}89\ (l)$.

Câu 19. 0,43.

Gọi A là biến cố "Xạ thủ được chọn thuộc hạng I", C là biến cố "Xạ thủ bắn trúng mục tiêu". Ta cần tính $P(A|C)$.

Ta có $P(A|C)=\dfrac{P(C\mid A)P(A)}{P(C\mid A)P(A)+P(C\mid \overline{A})P(\overline{A})}=\dfrac{0,8.0,4}{0,8.0,4+0,7.0,6}=\dfrac{16}{37}\approx 0,43.$

Câu 20. 0,36.

Gọi A là biến cố "Hai viên bi lấy ra cùng màu xanh"; B là biến cố "Hai viên bi lấy ra cùng màu trắng"; C là biến cố "Tích các số ghi trên hai viên bi chia hết cho 5". Ta cần tính $P(C|A\cup B)$.

Ta có: $P(A)=\dfrac{C_5^2}{C_{11}^2}=\dfrac{2}{11}$; $P(B)=\dfrac{C_6^2}{C_{11}^2}=\dfrac{3}{11}$;

$P(C\mid A)=1-P(\overline{C}\mid A)=1-\dfrac{C_4^2}{C_5^2}=\dfrac{2}{5}$; $P(C\mid B)=1-P(\overline{C}\mid B)=1-\dfrac{C_5^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{3}$.

Do đó $P(C|A\cup B)=\dfrac{P(CA)+P(CB)}{P(A)+P(B)}=\dfrac{P(C\mid A)P(A)+P(C\mid B)P(B)}{P(A)+P(B)}=0{,}36.$

Câu 21. 20,8.

Từ giả thiết, ta có:

$9\overrightarrow{AM}^2=4\overrightarrow{BM}^2$

$\Leftrightarrow 9\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}\right)^2=4\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}\right)^2$

$\Leftrightarrow 9\left(OM^2+OA^2-2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}\right)=4\left(OM^2+OB^2-2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB}\right)$

$\Leftrightarrow 5OM^2=4OB^2-9OA^2+2\overrightarrow{OM}\left(9\overrightarrow{OA}-4\overrightarrow{OB}\right).\quad (*)$

Khi đó, độ dài đoạn thẳng OM lớn nhất khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\vec{u}=9\overrightarrow{OA}-4\overrightarrow{OB}$ là các vectơ cùng hướng, với $\vec{u}=9\overrightarrow{OA}-4\overrightarrow{OB}=(30;\,30;\,-30)$.

Đặt $\overrightarrow{OM}=t(1;1;-1)$ với $t\neq 0$, từ (*) ta được $15t^2=0+180t\Rightarrow t=\dfrac{180}{15}=12$.

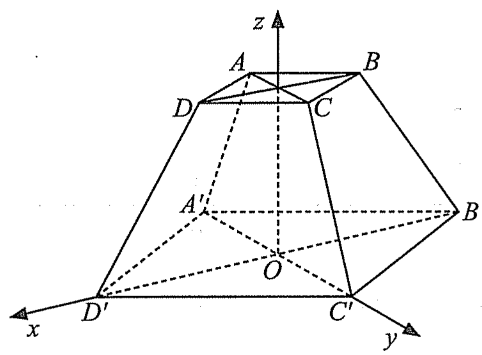
Vậy $\overrightarrow{OM}=12(1;1;-1)\Rightarrow OM=12\sqrt{3}\approx 20{,}8$.

Câu 22. 71.

Giả sử đáy $ABCD$ có diện tích 18 cm^2 và đáy $A'B'C'D'$ có diện tích 72 cm^2.

Khi đó $AB = 3\sqrt{2}$ cm, $A'B' = 6\sqrt{2}$ cm. Suy ra $A'C' = 12$ cm, $AC = 6$ cm.

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho gốc O là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$ như hình vẽ.
Khi đó $D'(6; 0; 0)$, $C'(0; 6; 0)$, $C(0; 3; 3)$, $B'(-6; 0; 0)$.



Ta có:

$(DCC'D')$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; 1)$;

$(BCC'B')$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{m} = (1; -1; -1)$.

Khi đó $\cos((DCC'D'), (BCC'B')) = \dfrac{|1.1 + 1.(-1) + 1.(-1)|}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}$.

Suy ra $((DCC'D'), (BCC'B')) \approx 71^\circ$.

Vậy $a = 71$.

ĐỀ SỐ 5

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. C

Câu 2. D

Ta có $y' = e^x(x-1)$.

Bảng xét dấu của đạo hàm:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Từ đó, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Câu 3. B

$f'(x) = 1 - \dfrac{9}{(x+2)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -5 \notin [-1; 3]$.

$f(-1) = 5$; $f(1) = 1$; $f(3) = \dfrac{9}{5}$.

$\min\limits_{[-1;\, 3]} f(x) = f(1) = 1$.

Câu 4. B

Ta có $y' = \dfrac{-2m-1}{(x-m)^2}$, $x \neq m$.

Điều kiện $\begin{cases} -2m-1 > 0 \\ m \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m < -\dfrac{1}{2}$.

Có bốn giá trị nguyên m thoả mãn là $-4; -3; -2; -1$.

Câu 5. B

$\int (\sin x + 2\cos x)\,\mathrm{d}x = \int \sin x\,\mathrm{d}x + 2\int \cos x\,\mathrm{d}x = -\cos x + 2\sin x + C.$

Câu 6. D

Câu 7. B

Câu 8. A

Câu 9. C

Kiến thức cần nhớ:

+ Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

+ Với mọi điểm M trong không gian, ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Câu 10. D

Câu 11. C

Câu 12. A

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 13. a) Sai. b) Đúng. c) Đúng. d) Sai.

Tập xác định: $D = [-3; 3]$.

$f'(x) = \sqrt{9-x^2} + x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \dfrac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ hoặc $x = \dfrac{-3\sqrt{2}}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	-3		$\frac{-3\sqrt{2}}{2}$		$\frac{3\sqrt{2}}{2}$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0

Câu 14.

a) Sai.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 3\sin x\,\mathrm{d}x = -3\cos x + C.$

b) Đúng.

$S = \int_0^{\pi} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} |3\sin x|\,\mathrm{d}x = (-3\cos x)\Big|_0^{\pi} = -3(-1-1) = 6.$

c) Đúng.

$S_a = \int_0^{a} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{a} |3\sin x|\,\mathrm{d}x = (-3\cos x)\Big|_0^{a} = 3 - 3\cos a = 3|\cos a - 1|.$

d) Sai.

$S_a = \dfrac{2}{3}S \Leftrightarrow 3 - 3\cos a = 4 \Leftrightarrow \cos a = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a \approx 1,91 \notin \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{7\pi}{12}\right).$

Câu 15.

a) Đúng.

Toạ độ trọng tâm $I(x_I; y_I; z_I)$ của tam giác ABC được tính bởi công thức:

$$x_I = \frac{x_A + x_B + x_C}{3},\ y_I = \frac{y_A + y_B + y_C}{3},\ z_I = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \Rightarrow x_I = 2,\ y_I = 1,\ z_I = 1.$$

Suy ra $I(2; 1; 1)$.

b) Đúng.

Ta có

$$x_C = \frac{x_A + x_B + x_E}{3},\ y_C = \frac{y_A + y_B + y_E}{3},\ z_C = \frac{z_A + z_B + z_E}{3} \Rightarrow x_E = -2,\ y_E = -7,\ z_E = 1.$$

Suy ra toạ độ của điểm E là $(-2; -7; 1)$.

c) Sai.

$d(A, (Oyz)) = |x_A| = 6.$

d) Sai.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 3\left|\overrightarrow{MI}\right| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow IM = \sqrt{5}.$

Khi đó, điểm M thuộc đường tròn đáy của hình nón có:

+ Đỉnh $I(2; 1; 1)$.

+ Trục là IH với $H(0; 1; 1)$ là tâm của hình tròn đáy.

+ Bán kính đáy $r = \sqrt{IM^2 - IH^2} = \sqrt{5-4} = 1.$

Gọi $A'(0; 1; 0)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz).

Khi đó, giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng AM là

$d = \sqrt{AA'^2 + A'H^2 + r^2} = \sqrt{36+1+1} = \sqrt{38}.$

Câu 16.

a) Đúng.

b) Sai.

c) Đúng.

d) Đúng.

Gọi $A = \Delta \cap d \Rightarrow A(t;\ -1-t;\ 2+2t)$; $\vec{n}_\alpha = (1;\ 1;\ -1)$.

Vì $M \notin d$ nên suy ra $\overrightarrow{MA} = (t-3;\ -t-2;\ 2t-7)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Do Δ // (α) nên suy ra: $\overrightarrow{MA}.\vec{n}_\alpha = 0 \Rightarrow t-3-t-2-2t+7=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow A(1;\ -2;\ 4)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ là: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-4}{5}$.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 17. 6 cm.

Ta có $\dfrac{r}{9} = \dfrac{18-h}{18} \Rightarrow h = 18-2r$ $(0 < r < 9)$.

Thể tích của hình trụ: $V = \pi r^2 h = \pi r^2(18-2r) = 2\pi(9r^2 - r^3)$.

$V' = 2\pi(18r - 3r^2)$; $V' = 0 \Leftrightarrow r = 0$ (loại) hoặc $r = 6$.

Bảng biến thiên:

r	0		6		9
V'		+	0	−	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

Từ đó, V đạt giá trị lớn nhất khi $r = 6$ cm.

Câu 18. 5,3 m^3.

Diện tích mặt cắt: $S(x) = \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 = 4 - x^2$.

Thể tích cái màn: $V = \int\limits_0^2 S(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (4-x^2)\mathrm{d}x = \left(4x - \dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \dfrac{16}{3} \approx 5,3$ (m^3).

Câu 19. 0,56.

Gọi A là biến cố "Nhân viên nam được chọn có bằng đại học"; B là biến cố "Nhân viên nữ được chọn có bằng đại học"; C là biến cố "Chỉ 1 trong 2 nhân viên có bằng đại học". Ta cần tính $P(B|C)$. Ta có

$$P(B|C) = \frac{P(BC)}{P(C)} = \frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{B}A) + P(\overline{A}B)} = \frac{9}{16} = 0,5625 \approx 0,56.$$

Câu 20. 0,42.

Gọi A là biến cố "An lấy được thẻ ghi số chẵn", B là biến cố "X chia hết cho 2".

Ta cần tính $P(A|B)$. Ta có

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})};$$

$$P(A)=\frac{4}{9};\ P(\overline{A})=\frac{5}{9};\ P(B|A)=1-P(\overline{B}|A)=1-\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{5}{6};$$

$$P(B|\overline{A})=1-P(\overline{B}|\overline{A})=1-\frac{C_5^3}{C_{11}^3}=\frac{31}{33}.$$

Vậy $P(A|B)=\dfrac{22}{53}\approx 0,42.$

Câu 21. 1,27.

Do M thuộc mặt phẳng (P) và $MA = MB$ nên M thuộc giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q), trong đó (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

+ Tìm được (Q): $y + z = 0$.

+ Khi đó M thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+3t\\ y=-t\\ z=t\end{cases}$ với $d=(P)\cap(Q)\Rightarrow M(1+3t;\ -t;\ t)$.

+ Ta có $\overrightarrow{AM}=(3t-1;\ -t-2;\ t)$, $\overrightarrow{BM}=(3t-1;\ -t;\ t+2)$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)=\frac{(3t-1)^2+2(t^2+2t)}{(3t-1)^2+t^2+(t+2)^2}=\frac{11t^2-2t+1}{11t^2-2t+5}=1-\frac{4}{11t^2-2t+5}.$$

Suy ra $\widehat{AMB}$ lớn nhất khi và chỉ khi

$$t=\frac{1}{11}\Rightarrow M\left(\frac{14}{11};-\frac{1}{11};\frac{1}{11}\right)\Rightarrow S=a+b+c=\frac{14}{11}\approx 1,27.$$

Câu 22. 1,98.

$D\left(\dfrac{1}{2};0;1\right)$.

Gọi $I=AC\cap BD$ suy ra $I\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4};1\right)$.

$$BD=\frac{\sqrt{2}}{2};\ IB=ID=\frac{\sqrt{2}}{4};\ SI=\sqrt{SB^2-IB^2}=\frac{\sqrt{94}}{20}.$$

Vậy $S\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{\sqrt{94}}{20}+1\right)$, suy ra $a+b+c\approx 1,98$.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGUYỄN TIẾN THANH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Tổ chức và chịu trách nhiệm bản thảo:
Phó Tổng biên tập NGUYỄN THÀNH ANH
Giám đốc Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản giáo dục Gia Định TRẦN THỊ KIM NHUNG

Biên tập nội dung: TRẦN THANH HÀ – ĐẶNG THỊ THUÝ
NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ – HOÀNG THỊ THU DUNG

Thiết kế sách: CAO HIỂN

Trình bày bìa: ĐẶNG NGỌC HÀ

Minh hoạ: THANH THẢO – CAO HIỂN

Sửa bản in: TRẦN THANH HÀ – ĐẶNG THỊ THUÝ
NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ – HOÀNG THỊ THU DUNG

Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH

HƯỚNG DẪN ÔN THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG MÔN TOÁN

(BIÊN SOẠN THEO CHƯƠNG TRÌNH GIÁO DỤC PHỔ THÔNG 2018)

Mã số: G0CHPT001M24-NBE
In 5.000 bản (QĐ 22TK), khổ 19 x 26,5 cm.
Số in: 8443. Đơn vị in: Nhà máy in Bộ Quốc phòng
Địa chỉ: Thôn Lưu Phái, xã Ngũ Hiệp, huyện Thanh Trì, TP. Hà Nội, Việt Nam
Cơ sở in: Khu CN Quốc Oai, Km 19, Đại lộ Thăng Long, Thị trấn Quốc Oai, TP. Hà Nội, Việt Nam
Số ĐKXB: 864-2024/CXBIPH/6-595/GD
Số QĐXB: 2713/QĐ-GD-HN ngày 12 tháng 7 năm 2024
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2024
Mã số ISBN: 978-604-0-42297-2